Diplomarbeit, Februar 2006

Hodge–Zahlen und K–Äquivalenz

Jossen Peter

Inhaltsverzeichnis

"... though the pork steaks are indeed quite plain, they have been fried in fat that was rendered down from the exorciced ghosts of black Welsh pigs that wander through the hills of Wales at night terrifying the inhabitants of that deplorable country!"[a]

[a]John Uskglass – the Raven King

KAPITEL 1

Motivation und Leitfaden

1. Problemstellung

Auf einer birationalen Klasse soll eine Äquivalenzrelation definiert werden, die sogenannte K–Äquivalenz, und diese soll dann mit kohomologischen Invarianten, nämlich den Bettizahlen und den Hodgezahlen verglichen werden. Um dies vorwegzunehmen: Glatte, eigentliche n–dimensionale Varietäten X und Y über $\mathbb{C}$ heissen K–äquivalent wenn eine glatte, eigentliche Varietät Z und birationale, eigentliche Morphismen $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ existieren, so dass $f^*K_X = g^*K_Y$. Hierbei bezeichnen K_X und K_Y die kanonischen Divisoren von X respektive Y.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & Y \end{tikzcd}$$

Legen wir solch eine Situation für den Rest dieses einführenden Abschnittes fest. Grob gesagt bedeutet die K–Äquivalenz von X und Y, dass X und Y birational sind, und dass *via* einer birationalen Transformation $X \dashrightarrow Y$ die Integration auf X mit der Integration auf Y kompatibel ist: Die Beziehung $f^*K_X = g^*K_Y$ ist nämlich gleichbedeutend mit $f^*\Omega^n_{X/\mathbb{C}} = g^*\Omega^n_{Y/\mathbb{C}}$, wobei $n := \dim X = \dim Y$, und n–Formen sind in der Differentialgeometrie die zu integrierenden Objekte. Das Hauptresultat wird

THEOREM 1 (Batyrev [**2**], Ito [**13**], Wang [**26**]). *Eigentliche, glatte, K–äquivalente Varietäten über $\mathbb{C}$ haben die selben Hodgezahlen (und Bettizahlen).*

sein. Diese Aussage spielt sich ausschliesslich in der Welt der komplexen Geometrie ab. Wie dem auch sei, unser Weg zu diesem Resultat führt über die algebraische Geometrie über Zahlkörpern und endlichen Körpern. Zwei Techniken spielen dabei eine zentrale Rolle: Zum einen die p–adische Hodge Theorie, und zum anderen die p–adische Integration.
Zunächst einmal erlauben es uns Standardargumente die Ausgangssituation so zu verbiegen, dass alle Varietäten und Morphismen über einem Zahlkörper k definiert sind, und einem Resultat von Deligne [**6**] zufolge ändert solch eine kleine Verbiegung nichts an den Invarianten, sprich Hodgezahlen. Ich schreibe X_k, Y_k, Z_k, f_k und g_k für die entsprechenden Modelle und Morphismen über k.
Wir können eine genügend grosse, aber immer noch endliche Menge von maximalen Idealen S des Ganzzahlrings $\mathcal{O}_k$ von k wählen, und dazu Schemata X_U, Y_U und Z_U die eigenlich und glatt über $U := \operatorname{spec} \mathcal{O}_k \setminus S$ sind, so dass $X_k = X_U \times_U \operatorname{spec} k$, $Y_k = Y_U \times_U \operatorname{spec} k$ und $Z_k = Z_U \times_U \operatorname{spec} k$, und so dass f_k und g_k in eigentliche,

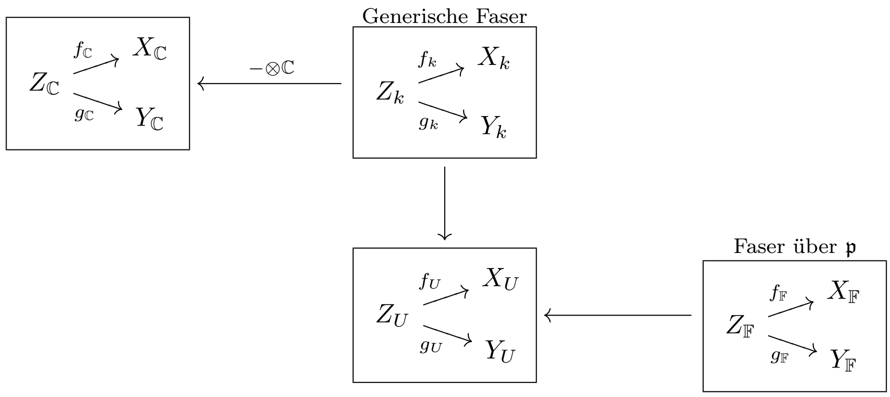
birationale Morphismen

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X_U \\ Z_U \arrow[ur, "f_U"] \arrow[dr, "g_U"'] & \\ & Y_U \end{tikzcd}$$

ausgedehnt werden können, die die Relation

$$f_U^* \Omega^n_{X_U/U} = g_U^* \Omega^n_{Y_U/U} \tag{1}$$

erfüllen.
Ist $\mathfrak{p}$ ein abgeschlossener Punkt von U (das ist auch ein maximales Ideal von $\mathcal{O}_k$), so können die Fasern über $\mathfrak{p}$ von X_U, Y_U und Z_U betrachtet werden, und für fast alle $\mathfrak{p} \in U$ sind diese Fasern, auch Reduktionen modulo $\mathfrak{p}$ genannt, eigentlich und glatt über dem Restklassenkörper in $\mathfrak{p}$. Vorsicht: Je nach Wahl der Modelle X_U, etc. kann das für ein individuelles $\mathfrak{p}$ der Fall sein oder auch nicht. Ist also $\mathfrak{p}$ ein geeignetes maximales Ideal von $\mathcal{O}_k$ und $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ der endliche Restklassenkörper mit $q = p^e$ Elementen, so sieht das so aus:



Sei R die Vervollständigung von $\mathcal{O}_k$ in $\mathfrak{p}$, und schreibe $X_R := X_U \times_U \operatorname{spec} R$, etc. und f_R, g_R für die induzierten Morphismen. Die Relation (1) impliziert dann die Gleichheit $f_R^* \Omega^n_{X_R/R} = g_R^* \Omega^n_{Y_R/R}$.
Mit Hilfe der p–adischen Integration auf X_R kann man rationale Punkte auf der Reduktion $X_\mathbb{F}$ zählen, und die eben erwähnte Gleichheit impliziert nichts anderes als dass $X_\mathbb{F}$ und $Y_\mathbb{F}$ die selbe Anzahl $\mathbb{F}$–rationaler Punkte haben. In dem man die erforderlichen Schritte auch für endliche Erweiterungen von R durchführt findet man

$$\# X_\mathbb{F}(\mathbb{F}_{q^n}) = \# Y_\mathbb{F}(\mathbb{F}_{q^n})$$

Mit anderen Worten haben $X_\mathbb{F}$ und $Y_\mathbb{F}$ die selben Zetafunktionen[1]. Die Weilsche Vermutung betreffend die Bettizahlen von X und Y impliziert dann ohne weitere Arbeit

Theorem 2 (Batyrev [**2**], Ito [**13**], Wang [**26**]). *Eigentliche, glatte, K–äquivalente Varietäten über $\mathbb{C}$ haben die gleichen Bettizahlen.*

[1] Im Kapitel 2 findet sich das notwendige Material zu den Zetafunktionen, den Weilschen Vermutungen und zur Lefschetzschen Fixpunktformel von der im Folgenden die Rede sein wird.

Neben der p–adischen Integration gibt es noch eine andere Möglichkeit rationale Punkte auf $X_{\mathbb{F}}$ zu zählen, nämlich die Lefschetzsche Fixpunktformel. Ist $\overline{\mathbb{F}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}$, und schreibt man $F : X_{\overline{\mathbb{F}}} \longrightarrow X_{\overline{\mathbb{F}}}$ für den Frobeniusmorphismus hoch q, so lautet sie

$$\#X_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}_{q^n}) = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{tr}\left(F^{n*}, H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

Dasselbe gilt für $Y_{\mathbb{F}}$. Nun kann man $F \in \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q|\mathbb{F}_q)$ in ein Element $\operatorname{Frob}_{\mathfrak{p}}$, genannt *geometrisches Frobeniuselement über* $\mathfrak{p}$ der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$ hochheben, und der Satz vom eigentlichen–glatten Basiswechsel besagt dann, dass

$$\sum_{i=0}^{2\dim Y} (-1)^i \operatorname{tr}\left(\operatorname{Frob}_{\mathfrak{p}}^{*n}, H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\right) = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{tr}\left(\operatorname{Frob}_{\mathfrak{p}}^{*n}, H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\right) \tag{2}$$

unter der Hypothese dass $\#X_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}_{q^n}) = \#Y_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}_{q^n})$ für alle n. Die Gleichung (2) gilt für fast alle maximalen Ideale $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_k$. Mit Hilfe einer Variante des Čebotarevschen Dichtigkeitssatzes und den Weilschen Vermutungen kann daraus geschlossen werden, dass die $\operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$–Darstellungen $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ die selben Halbvereinfachungen haben:

THEOREM 3. *Seien X_U und Y_U Schemata endlichen Typs über $\mathcal{O}_k$ deren generische Fasern eigentlich und glatt über k sind. Wenn für fast alle maximalen Ideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}\mathcal{O}_k$ die Reduktionen von X_U und Y_U modulo $\mathfrak{p}$ die selbe Zetafunktion haben, dann haben die $\operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$–Darstellungen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ die selben Halbvereinfachungen.*

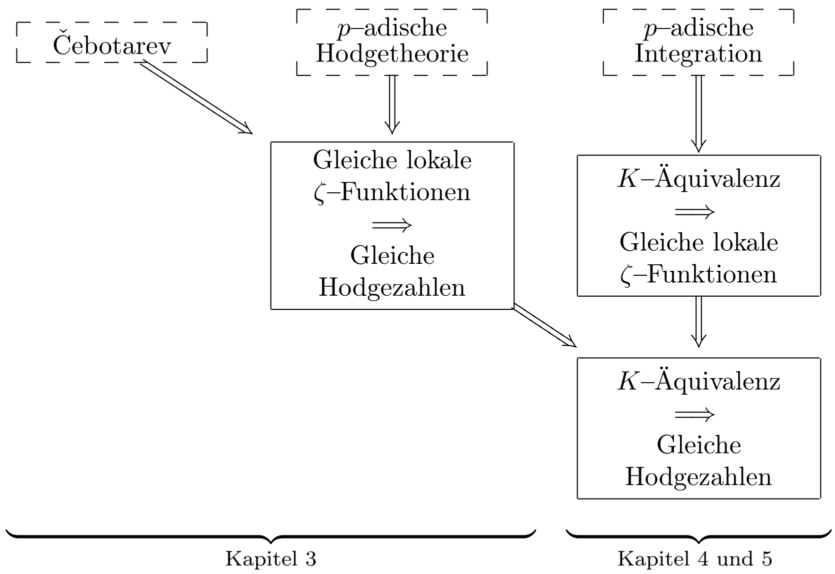
Die Hypothesen dieses Satzes sind insbesondere dann erfüllt, wie wir es mit Hilfe der p–adischen Integration gezeigt haben werden, wenn X_U und Y_U wie vorhin von K–äquivalenten Varietäten herrühren, und so folgert man direkt:

KOROLLAR 1. *Seien X und Y eigentliche und glatte Varietäten über k. Sind $X_{\overline{k}}$ und $Y_{\overline{k}}$ K–Äquivalent, so haben die $\operatorname{Gal}(\overline{k}|k)$–Darstellungen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ die selben Halbvereinfachungen.*

Schliesslich geht es darum, zu zeigen dass man die Hodgezahlen einer glatten eigentlichen Varietät X über k aus den Halbvereinfachungen von $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ (respektive $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$) berechnen kann. Das ist relativ einfach, wenn man einen schwierigen Satz von Faltings akzeptiert, nämlich das p–adische Analogon der Hodgezerlegung.

2. Leitfaden

Im Kapitel 2 rufe ich Bekanntes und Interessantes über die Zetafunktionen, die Weilschen Vermutungen, étale Kohomologie und die Lefschetzsche Fixpunktformel in Erinnerung. Die besagte Abwandlung des Čebotarevschen Satzes wird ebenfalls erläutert. Die Kapitel 3, 4 und 5 befassen sich dann mit der Ausführung des vorhin erklärten Programmes wie folgt:


Čebotarev
p–adische Hodgetheorie
p–adische Integration
Gleiche lokale ζ–Funktionen $\Longrightarrow$ Gleiche Hodgezahlen
K–Äquivalenz $\Longrightarrow$ Gleiche lokale ζ–Funktionen
K–Äquivalenz $\Longrightarrow$ Gleiche Hodgezahlen
Kapitel 3
Kapitel 4 und 5

KAPITEL 2

Von den ζ–Funktionen

1. Die Weilschen Vermutungen

Die Zetafunktion eines Schemas X von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}} \tag{3}$$

wobei das Produkt über alle abgeschlossenen Punkte von X läuft, und $N(x)$ die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers in x bezeichnet. Das Produkt (3) konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{re}(s) > \dim X$. Im Spezialfall $X = \operatorname{spec} \mathbb{Z}$ erhält man die gute alte Riemannsche Zetafunktion, von der man zwar schon viel, aber leider noch nicht alles weiss.

Ist X ein Schema endlichen Typs über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$, so weiss man mehr: In diesem Fall ist für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ der Restklassenkörper in x eine endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}_q$, sagen wir vom Grad $\deg(x)$. Man hat also $N(x) = q^{\deg(x)}$, und wenn man noch $t := q^{-s}$ substituert, gibt das

$$\zeta_X(s) =: Z_X(t) = \prod_{x \in X} \frac{1}{1 - t^{\deg(x)}} \tag{4}$$

Schreibt man a_n für die Anzahl der $\mathbb{F}_{q^n}$–rationalen Punkte in X, so zeigt man leicht, dass

$$Z_X(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n}\right) \tag{5}$$

Sei nun X eine eigentliche, glatte Varietät mit Dimension n über $\mathbb{F}_q$. Die Weilschen Vermutungen lauten wie fogt:

(I) Rationalität: Die Funktion $Z_X(t)$ ist rational, das heisst der Quotient zweier Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Also $Z_X(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

(II) Riemannhypothese: Es gibt Polynome $P_0, \ldots, P_{2n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so dass

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)P_3(t) \cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t) \cdots P_{2n}(t)}$$

Dabei ist $P_0(t) = 1 - t$ und $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$. Der komplexe Betrag aller Wurzeln von P_i ist $q^{-i/2}$.

(III) Funktionalgleichung: Sei Δ die Diagonale in $X \times X$, und $e := \Delta.\Delta$ deren Selbstschnittzahl. Dann erfüllt $Z_X(t)$ die Funktionalgleichung

$$Z_X\left(\frac{1}{q^n t}\right) = \varepsilon \cdot q^{ne/2} t^e Z_X(t)$$

Dabei ist ε entweder 1 oder -1, und zwar wie folgt: Sei $\overline{\mathbb{F}}_q$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_q$ und sei $F : X_{\overline{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ der Frobeniusmorphismus hoch q. Dann ist $\varepsilon = 1$ falls n ungerade ist, oder falls n gerade und $q^{n/2}$ eine gerade Anzahl mal als Eigenwert von F^* auf $H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ vorkommt, und $\varepsilon = -1$ sonst. Das Objekt $H^n_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ erkläre ich im nächsten Abschnitt.

(IV) Bettizahlen: Unter der Annahme dass die Vermutung (**II**) wahr ist, schreibe $B_i := \deg P_i(t)$. Dann gilt

$$e := \Delta.\Delta = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i B_i$$

Gibt es einen Zahlkörper k und eine Varietät Y über $\mathcal{O}_k$, so dass X die Reduktion modulo eines Primideals von $\mathcal{O}_k$ ist, dann sind die B_i's die üblichen Bettizahlen des topologischen Raumes $Y \times_{\mathcal{O}_k} \mathbb{C}$.

Sämtliche dieser Vermutungen wurden im Kurvenfall von André Weil selbst, und im allgemeinen Fall dann in den 60er und 70er Jahren von Bernard Dwork, Alexander Grothendieck, Pierre Deligne und anderen positiv bestätigt. Die Zetafunktion eines Schemas endlichen Typs über $\mathbb{F}_q$ ist übrigens ohne weitere Hypothesen immer rational, siehe dazu den recht elementaren Beweis von Dwork, [**8**], oder etwas ausführlicher Serres Exposé desselben in [**19**]. Siehe Hartshorne [**12**], Anhang C §2 für einen Überblick über die Geschichte der Weilschen Vermutungen.

Beispiel 2.1. Der n–dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ ist natürlich eigentlich und glatt, und es gilt

$$a_k := \#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_{q^k}) = \frac{q^{k(n+1)} - 1}{q^k - 1} = q^{kn} + q^{k(n-1)} + \cdots + q^k + 1$$

und damit

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{P}^n}(t) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} (q^{kn} + q^{k(n-1)} + \cdots + q^k + 1)\frac{t^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} q^{jk}\frac{t^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^{n} -\log(1 - q^j t)\right) \\ &= \prod_{j=0}^{n} (1 - q^j t)^{-1} \end{aligned}$$

Die Zetafunktion von $\mathbb{P}^n$ ist tatsächlich rational, und die Riemannhypothese stimmt für $P_{2j} = 1 - p^j t$ und $P_{2j-1} = 1$, was im Einklang mit den Bettizahlen von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ steht. Die Funktionalgleichung funktioniert ebenfalls, für $e = n$.

Beispiel 2.2. Als weiteres nichttriviales Beispiel betrachte den n–dimensionalen Torus $T_n := \operatorname{spec} \mathbb{F}_q[X_1, X_1^{-1}, X_2, X_2^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$. Offensichtlich hat man

$$a_k := \#T_n(\mathbb{F}_{q^k}) = (q^k - 1)^n$$

und damit

$$\begin{aligned} Z_{T_n}(t) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}(q^k-1)^n\frac{t^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\sum_{k=1}^{\infty}q^{jk}\frac{t^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\big(-\log(1-q^jt)\big)\right) \\ &= \prod_{j=0}^{n}(1-q^jt)^{(-1)^{n-j+1}\binom{n}{j}} \end{aligned}$$

Also etwa

$$Z_{T_4}(t) = \frac{(1-qt)^4(1-q^3t)^4}{(1-t)(1-q^2t)^6(1-q^4t)}$$

Die Zetafunktion des Torus ist also eine rationale Funktion. Die Riemannhypothese trifft so wie wir sie hier formuliert haben nicht zu, aber der Torus ist ja auch nicht eigentlich.

Sei X irgend ein Schema endlichen Typs über $\mathbb{F}_q$. Es ist klar, dass wenn Y und Z offene oder geschlossene Subschemata von X sind so dass $X = Y \cup Z$, die Relation

$$Z_X(t) = \frac{Z_Y(t)Z_Z(t)}{Z_{Y\cap Z}(t)} \tag{6}$$

gelten muss. Mit dieser einfachen Beobachtung und der vorangehenden Rechnung können wir die Zetafunktionen von torischen Varietäten bestimmen (zur allgemeinen Theorie der torischen Varietäten siehe [**10**]). Eine torische Varietät T ist immer die disjunkte Vereinigung von Torusbahnen, sagen wir je s_k der Dimension k, für $0 \le k \le n := \dim T$. Damit gilt

$$Z_T(t) = \prod_{k=0}^{n}\prod_{j=0}^{k}(1-p^jt)^{(-1)^{k-j+1}s_k\binom{k}{j}} = \prod_{j=0}^{n}(1-p^jt)^{-d_j}$$

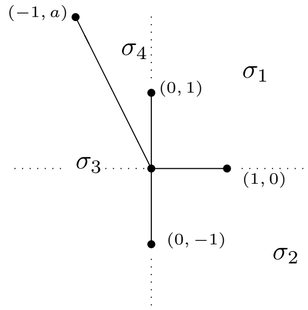
mit

$$d_j = \sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}s_k\binom{k}{j}$$

Ist T eine komplexe, glatte und kompakte torische Varietät, so stimmt das mit der bekannten Formel für die Bettizahlen $\beta_0, \ldots, \beta_{2n}$ von T überein, nämlich ([**10**], section 4.5)

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \text{ ungerade ist} \\ \sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}s_k\binom{k}{j} & \text{falls } i = 2j \text{ gerade ist} \end{cases}$$

Als konkretes Beispiel betrachte für $a \in \mathbb{Z}$ die Hirzebruchschen Fläche F_a, deren Fächer



ist. Man hat dann $s_0 = s_1 = 4$ und $s_2 = 1$, und entsprechend der oben genannten Formel ist die Zetafunktion von F_a gegeben durch

$$Z_{F_a}(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)^2(1-q^2t)}$$

Beispiel 2.3. Sei X eine glatte, projektive n–dimensionale Varietät über $\mathbb{F}_q$ und sei $Y \longrightarrow X$ eine Aufblasung von X in einem $\mathbb{F}_q$–rationalen Punkt x_0. Man hat dann

$$\#Y(\mathbb{F}_{q^k}) = \#X(\mathbb{F}_{q^k}) - 1 + \#\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_{q^k})$$

Die Zetafunktionen von X und Y können damit wie folgt verglichen werden:

$$\begin{aligned}
Z_Y(t) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \#Y(\mathbb{F}_{q^k})\frac{t^k}{k}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \#X(\mathbb{F}_{q^k})\frac{t^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\#\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_{q^k})\frac{t^k}{k}\right) \\
&= (1-t)\cdot Z_X(t)\cdot Z_{\mathbb{P}^{n-1}}(t) \\
&= Z_X(t)\cdot\prod_{j=1}^{n-1}(1-q^jt)^{-1}
\end{aligned}$$

Als konkretes Beispiel, sei $a \in \mathbb{N}$ und Y eine Aufblasung von $\mathbb{P}^2$ in a Punkten. Wendet man obige Relation a mal auf die Zetafunktion von $\mathbb{P}^2$ an, so erhält man

$$Z_Y(t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)^{a+1}(1-q^2t)}$$

Beispiel 2.4. Sei X eine glatte, projektive Kurve über $\mathbb{F}_q$ vom Geschlecht g. Ein klassisches Resultat von Weil ([**28**]) besagt dass es algebraische Ganzzahlen $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ gibt, so dass

$$X(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n - \sum_{i=1}^{2g}\omega_i^n + 1 \tag{7}$$

Weiter kann man die ω_i's so anordnen, dass

$$\omega_i\omega_{2g-i} = q \tag{8}$$

für alle i, und schlussendlich gilt

$$|\omega_i| = q^{1/2} \tag{9}$$

für alle i. Die Gleichung (7) bedeutet dann, dass

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

wobei $P_1 = (1-\omega_1 t)\cdots(1-\omega_{2g}t)$. Die Beziehung (9) entspricht somit der Riemannhypothese, und (8) der Funktionalgleichung. Die Resultate (7) und (8) sind relativ direkte Konsequenzen des Riemann–Roch Satzes, während (9), die Riemannhypothese, schwieriger zu zeigen ist (wer hätte das nicht erwartet?). Weils Methoden zum Beweis von (9) benutzen entweder die Jacobische Varietät von X, oder aber den Riemann–Roch Satz auf der Fläche $X \times X$ um die folgende Ungleichung, die sogenannte Hasse–Schranke

$$|\#X(\mathbb{F}_{q^n}) - (q^r + 1)| \leq 2g\, q^{n/2}$$

zu zeigen, aus der (9) rasch folgt. Einen kurzen, alternativen Beweis, der ebenfalls zuerst Hasse–Schranke zeigt, den Riemann–Roch Satz aber nur auf der Kurve X benutzt, haben Stepanov und Bombieri gefunden[1]

2. ℓ–adische Kohomologie und die Lefschetzformel

2.1. Die ℓ–adische Kohomologie und ihre grundlegenden Eigenschaften. Sei X ein Schema endlichen Typs über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k von charakteristik $p \geq 0$ und sei ℓ eine Primzahl. Schreibe $\mathbb{Z}/\ell^i\mathbb{Z}$ für die konstante Garbe $\mathbb{Z}/\ell^i\mathbb{Z}$ auf dem kleinen étalen Situs $X_{\text{ét}}$ von X, und definiere

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l) := \lim_{j\in\mathbb{N}} H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^j\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

Für die Details die zum Verständnis dieser Definition nötig sind, verweise ich auf folgende Literatur: Die Standardreferenz ist Grothendiecks *séminaire de géométrie algébrique* SGA4. Während das Buch von Milne [**17**] ein Referenzwerk ist, und sich nicht unbedingt zum Selbststudium eignet gibt Milne eine Einführung und viel Motivation in [**16**]. Die Theorie der Grothendieckschen Topologien wird besonders schön in [**22**] erklärt.

Die étalen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ haben für $\ell \neq p$ alle Eigenschaften die man von einer guten Kohomologietheorie erwartet. Zunächst kennt man folgende vielsagende Vergleichseigenschaft: Sei X eine eigentliche, glatte Varietät über $\mathbb{C}$. Dann hat $M := X(\mathbb{C})$ die Struktur einer analytischen komplexen Mannigfaltigkeit (siehe Kapitel 4) und es gilt

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \cong \lim_{j\in\mathbb{Z}} H^i_{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}/\ell^j\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

wobei auf der rechten Seite $H^i_{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}/\ell^j\mathbb{Z})$ die singuläre Kohomologie des topologischen Raumes M mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/\ell^j\mathbb{Z}$ bezeichnet. Diese Eigenschaft ist nicht etwa eine überraschende Konsequenz, sondern ein erklärtes Ziel der Konstruktion der ℓ–adischen Kohomologie: Die étale Topologie auf X soll ja gerade die analytische Struktur auf M imitieren.

Zum anderen gelten im Allgemeinen für die ℓ–adische Kohomologie die essentiellen

[1] Bombieri, E. *Counting points on curves over finite fields* Séminaire Bourbaki **430** (1972/1973)

Kniffe, die im komplexen Fall auch für die singuläre Kohomologie gelten. Das sind, unter anderem (immer für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k und eine Primzahl $\ell \neq p := \operatorname{char} k \geq 0$):

(I) Funktorialität: Die Zuweisung $X \longmapsto H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Schemata endlichen Typs über k in die Kategorie der $\mathbb{Q}_\ell$–Vektorräume.

(II) Verschwindungssatz: Ausser für $0 \leq i \leq 2 \dim X$ sind die $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ trivial. Ausserdem weiss man dass wenn X affin ist, $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ bereits für $i \leq \dim X$ verschwindet.

(III) Endlichkeit: Ist X eigentlich über k, so sind alle $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ endlichdimensional. Man vermutet, dass das auch für nichteigentliche X der Fall ist.

(IV) Cupprodukte: Es gibt eine Cupproduktstruktur

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^j_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{i+j}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

für alle i, j.

(V) Poincarédualität: Ist X eigentlich und glatt über k, und $n := \dim X$, so gibt es einen kanonischen Isomorphiosmus $H^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$, und das Cupprodukt

$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^{2n-i}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2n}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

ist eine perfekte Paarung für alle $0 \leq i \leq 2n$.

(VI) Basiswechsel: Ist $f : X \longrightarrow S$ ein glatter eigentlicher Morphismus und $s \longrightarrow S$ ein geometrischer Punkt von S, dann sind die

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{\text{ét}}(X_s, \mathbb{Q}_\ell)$$

lokalkonstant (als Funktionen von s). Insbesondere bleibt $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ unverändert bei einem Basiskörperwechsel.

2.2. Die Lefschetzsche Fixpunktformel. Sei M eine reelle, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit, und sei $f : M \longrightarrow M$ eine glatte Abblidung von M in sich selbst. Schreibe f^* für die induzierte lineare Abbildung $f^* : H^i(M, \mathbb{R})$, und sei n die (komplexe) Dimension von M. Die *Lefschetzzahl* von f ist definiert als

$$L(f) := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}(f^*, H^i(M, \mathbb{R})) \tag{10}$$

Ist $x \in M$ ein Fixpunkt von f, so induziert die Ableitung von f einen Endomorphismus des Tangentialraums $(Df)_x = T_x M \longrightarrow T_x M$ in x. Die *Multiplizität* des Fixpunktes x ist dann definiert als

$$m(x) := \operatorname{sgn} \det((Df)_x - \mathrm{id})$$

Hier ist $\operatorname{sgn}(r) = 1$ falls $r > 0$, $\operatorname{sgn}(r) = -1$ falls $r < 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Schneidet der Graph $\Gamma \subseteq M \times M$ die Diagonale $\Delta \subseteq M \times M$ transversal, so hat f nur eine endliche Anzahl isolierter Fixpunkte (die der Schnittmenge $\Gamma \cap \Delta$ entsprechen), und die klassische Lefschetzsche Fixpunktformel lautet dann

$$L(f) = \sum_x m(x) \tag{11}$$

wobei die Summe über alle Fixpunkte von f läuft. Beobachte dass die Wahl der entgegengesetzten Orientierung auf beiden Seiten von (11) das Vorzeichen ändert. Man kann also mit (10) die Anzahl der Fixpunkte von f mit Multiplizität zählen (siehe **[3]**, chapter II, 11.26).

Für die ℓ–adische Kohomologie gibt es eine analoge Lefschetzsche Fixpunktformel: Sei X eine eigentliche, glatte Varietät über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k von Charakteristik $p \geq 0$, und sei wie vorhin $\ell \neq p$ eine Primzahl. Ist $f : X \longrightarrow X$ regulär, so gilt (siehe Milne **[17]**, chapter VI theorem 12.3)

$$\Gamma.\Delta = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{tr}(f^*, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)) \tag{12}$$

wobei Γ den Graphen von f und Δ die Diagonale in $X \times_k X$ bezeichnet. Dabei ist $\Gamma.\Delta$ die Schnittzahl von Γ mit Δ im Sinne der Schnitttheorie auf $X \times_k X$. Falls sich Γ und Δ transversal schneiden hat f nur endlich viele, isolierte Fixpuntke, und $\Gamma.\Delta$ ist dann nichts anderes als deren Anzahl, gezählt mit Multiplizität.

Beispiel 2.5. Sei $f : \mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ definiert durch $[x, y] \longmapsto [x + y, y]$. Kleben wir $\mathbb{P}^1_k$ standardgemäss aus zwei Klonen U_x und U_y von $\mathbb{A}^1_k$ zusammen, so wirkt f auf diesen beiden affinen Teilen wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc}
x & & U_x & \xrightarrow{x \longmapsto [x,1]} & \mathbb{P}^1_k & \xleftarrow{[1,y] \longleftarrow\!\shortmid\, y} & U_y & & y \\
\Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\
x+1 & & U_x & \xrightarrow{x \longmapsto [x,1]} & \mathbb{P}^1_k & \xleftarrow{[1,y] \longleftarrow\!\shortmid\, y} & U_y & & \dfrac{y}{y+1}
\end{array}$$

Auf U_x gibt es also keine Fixpunkte, und auf U_y gibt es den Fixpunkt $y = 0$. Die Schnittzahl $\Gamma.\Delta$ ist also die Schnittzahl der Kurven $z(1 + y) = y$ und $z = y$ in $U_y \times U_y = \mathbb{A}^2_k$, und das ist die Dimension von

$$k[y, z]/\langle (z - y), (z(1 + y) - y)\rangle = k[z]/\langle (z(1 + z) - z)\rangle = k[z]/\langle z^2\rangle$$

Daraus folgt $\Gamma.\Delta = 2$. Andererseits wirkt f^* trivial auf die étalen Kohomologiegruppen $H^0_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_k, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$ und $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_k, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$, und $H^1_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_k, \mathbb{Q}_\ell)$ ist trivial (die Wirkung von f^* auf $H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1_k, \mathbb{Q}_\ell)$ ist die Multiplikation mit dem Grad von f, und der ist hier 1). Damit sehen wir die Gleichung (12) in diesem Fall bestätigt.

Beispiel 2.6. Wähle für $f : X \longrightarrow X$ die Identität. Dann ist der Graph von f dasselbe wie die Diagonale, und f induziert auf allen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ die Identität. Das heisst dass

$$\operatorname{tr}(f^*, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Die Formel (12) wird dann zu

$$\Delta.\Delta = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

Das steht im Einklang mit der Weilschen Vermutung (**IV**) betreffend die Bettizahlen.

2.3. Kohomologische Interpretation der Weilschen Vermutungen. Sei X_0 eine eigentliche, glatte Varietät über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$, sei $\overline{\mathbb{F}}_q$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_q$, und schreibe $X := X_0 \times_{\operatorname{spec} \mathbb{F}_q} \operatorname{spec} \overline{\mathbb{F}}_q$. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\mathbb{F}_{q^n}$ den endlichen Teilkörper von $\overline{\mathbb{F}}_q$ mit q^n Elementen.
Sei $F : X \longrightarrow X$ der Frobeniusmorphismus hoch q. Man kann dann die Fixpunkte

von F^n mit $X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ identifizieren, und die Lefschetzformel ergibt somit für eine von $p := \operatorname{char} \mathbb{F}_q$ verschiedene Primzahl ℓ

$$\# X_0(\mathbb{F}_{q^n}) = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{tr}(F^{n*}, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell))$$

Wenn man dies in der Definition der Zetafunktion von X_0 substituiert, erhält man

$$Z_{X_0}(t) = \exp\left(\sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tr}(F^{*n}, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)) \frac{t^n}{n} \right)$$

$$= \prod_{i=0}^{2\dim X} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tr}(F^{*n}, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)) \frac{t^n}{n} \right)^{(-1)^i}$$

Ist $\varphi : V \longrightarrow V$ ein Automorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so hat man die mit elementaren Mitteln herleitbare Identität von Potenzreihen

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tr}(\varphi^n, V) \frac{t^n}{n} \right) = \det(1 - \varphi t, V)^{-1}$$

Damit findet man

$$Z_{X_0}(t) = \prod_{i=0}^{2\dim X} \det(1 - F^* t, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \tag{13}$$

Die Rationalität von Z_{X_0} ist eine direkte Konsequenz der Gleichung (13): A priori hat man $Z_{X_0} \in \mathbb{Q}[[t]]$, und (13) zeigt dass $Z_{X_0} \in \mathbb{Q}_\ell(t)$. Man weiss aber (Bourbaki, Algèbre IV §5 Ex.3), dass $\mathbb{Q}[[t]] \cap \mathbb{Q}_\ell(t) = \mathbb{Q}(t)$. Mit etwas linearer Algebra folgt auch die Funktionalgleichung aus (13) und der Poincarédualität.
Die Riemannhypothese ist wesentlich schwieriger zu zeigen. In ihrer präzisierten Form lautet sie wie folgt:

Theorem 2.7 (Deligne [**5**]). *Für jedes $0 \leq i \leq 2\dim X$ hat das Polynom $P_i(t) := \det(1 - F^* t, H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell))$ ganzzahlige Koeffizienten, und ist unabhängig von ℓ. Alle komplexen Wurzeln α von P_i sind vom Betrag $|\alpha| = q^{-i/2}$.*

Beispiel 2.8. Das Berechnen einer Zetafunktion mit der Formel (13) ist nicht sehr praktisch, weil man dazu wissen muss, wie der Frobeniusmorphismus auf die Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ wirkt. Falls man bereit ist ein paar zu erwartende Eigenschaften der ℓ–adischen Kohomologie zu akzeptieren kann man diese Wirkung wie folgt ausrechnen:
Akzeptieren wir die Künnethformel für die ℓ–adische Kohomologie (siehe Milne [**17**] chapter VI, §8. Die Torsion überlebt $- \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ nicht), die besagt, dass wenn $\pi : E \longrightarrow X$ ein lokaltriviales Bündel mit Faser Y ist, und X und Y eigentlich und glatt sind, die ℓ–adische Kohomologie von E durch die ℓ–adischen Kohomologien von X und Y ausgedrückt werden kann: Es gibt einen funktoriellen Isomorphismus

$$H^k_{\text{ét}}(E, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^j_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Q}_\ell)$$

Betrachten wir noch einmal für $a \in \mathbb{Z}$ die Hirzebruchsche Fläche F_a aus dem Beispiel 2.2, aber über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\overline{\mathbb{F}}_q$. Ohne grosse Mühe zeigt man, dass F_a ein lokaltriviales $\mathbb{P}^1$–Bündel über $\mathbb{P}^1$ ist. Der Frobeniusmorphismus

F auf $\mathbb{P}^1$ und auf F_a ist natürlich kompatibel mit der Bündelstruktur, i.e. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & F_a & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & {\scriptstyle F}\downarrow & & {\scriptstyle F}\downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & F_a & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

kommutiert. Die ℓ–adische Kohomologie von $\mathbb{P}^1$ und die Wirkung von F darauf ist bekannt, nämlich

$$H^i_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell & \text{falls } i = 0\text{, und in diesem Fall induziert } F \text{ die Identität} \\ \mathbb{Q}_\ell & \text{falls } i = 2\text{, und in diesem Fall induziert } F \text{ die} \\ & \text{Multiplikation mit } \deg F = q \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Aus der Künnethformel schliessen wir, dass

$$H^2_{\text{ét}}(F_a, \mathbb{Q}_\ell) \cong \underbrace{H^0_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell)}_{F^* = \mathrm{id} \otimes (\cdot q)} \oplus \underbrace{H^2_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^0_{\text{ét}}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell)}_{F^* = (\cdot q) \otimes \mathrm{id}}$$

Somit ist $H^2_{\text{ét}}(F_a, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell^2$, und der Frobeniusmorphismus ist die Multiplikation mit q. Ebenso kann man zeigen, dass F trivial auf $H^0_{\text{ét}}(F_a, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$ wirkt, und dass dass F auf $H^4_{\text{ét}}(F_a, \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$ die Multiplikation mit $\deg F = q^2$ induziert. Alle anderen étalen Kohomologiegruppen von F_a sind trivial. Die Formel (13) liefert also

$$\begin{aligned} Z_{(F_a)_0}(t) &= \det(1 - t, \mathbb{Q}_\ell)^{-1} \det(1 - qt, \mathbb{Q}_\ell^2)^{-1} \det(1 - q^2 t, \mathbb{Q}_\ell)^{-1} \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-qt)^2(1-q^2t)} \end{aligned}$$

Erfreulierweise ist das das selbe Resultat, dass wir bereits im Beispiel 2.2 gefunden haben.

3. Eine Anwendung des Čebotarevschen Dichtigkeitssatzes

Sei k ein Zahlkörper und l eine endliche Galoiserweiterung von k mit Galoisgruppe G. Sei v eine diskrete Bewertung auf k und $\mathfrak{p} \in \operatorname{specm} \mathcal{O}_K$ die entsprechende Primstelle. Sei w eine Fortsetztung von v auf l, und $\mathfrak{q} \in \operatorname{specm} \mathcal{O}_l$ die Primstelle von w. Man sagt $\mathfrak{q}$ sei eine *Primstelle über* $\mathfrak{p}$. Die Teilgruppen von G

$$\begin{aligned} G_Z(\mathfrak{q}) &:= \{g \in G \mid g\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\} \\ G_T(\mathfrak{q}) &:= \{g \in G \mid g(x) - x \in \mathfrak{q} \text{ für alle } x \in \mathcal{O}_l\} \end{aligned}$$

heissen *Zerlegungsgruppe*, respektive *Trägheitsgruppe von* $\mathfrak{q}$. Sind L und K die Vervollständigungen von l und k für die entsprechenden Bewertungen, so gilt

$$G_Z(\mathfrak{q}) \cong \mathrm{Gal}(L|K)$$

Die entsprechende Erweiterung der Restklassenkörper $\lambda|\kappa$ ist galoissch (siehe Serre, *Corps locaux*, **[18]** chapitre I §7 corrolaire de la proposition 21, und die nachfolgende Bemerkung). Weiter hat man einen natürlichen Epimorphismus von $G_Z(\mathfrak{q})$ auf die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\lambda|\kappa)$, und die Trägheitsgruppe von $\mathfrak{q}$ ist genau der Kern dieses

Epimorphismus (loc. cit. proposition 22). Man hat also eine kurze exakte Sequenz endlicher Gruppen

$$1 \longrightarrow G_T(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\trianglelefteq} G_Z(\mathfrak{q}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gal}(\lambda|\kappa) \longrightarrow 1$$

Die Trägheitsgruppe ist ein Normalteiler der Zerlegungsgruppe, und der Quotient $G_Z(\mathfrak{q})/G_T(\mathfrak{q})$ kann mit $\mathrm{Gal}(\lambda|\kappa)$ identifiziert werden, und ist deshalb eine endliche zyklische Gruppe. Das Ideal $\mathfrak{q}$ heisst *unverzweigt* falls $G_T(\mathfrak{q})$ trivial ist. Sind alle Primideale über $\mathfrak{p}$ unverzweigt so sagt man dass $\mathfrak{p}$ in l unverzweigt ist, und auch, dass die Erweiterung *$l|k$ unverzweigt in $\mathfrak{p}$* ist. Eine endliche Erweiterung ist stets nur in einer endlichen Anzahl von Primstellen verzweigt (loc. cit. chapitre III, §5 corollaire 2 du théorème 1)
Ist die Erweiterung $l|k$ in $\mathfrak{q}$ unverzweigt, so nennt man *Frobeniuselement von $\mathfrak{q}$* das Element $F_\mathfrak{q} \in G_Z(\mathfrak{q})$ das via π auf den inversen Frobeniusmorphismus in $\mathrm{Gal}(\lambda|\kappa)$ abgebildet wird, das heisst für alle $x \in \lambda$ gilt

$$\pi(F_\mathfrak{q})(x) = x^{-\#k}$$

Ist insbesondere $l|k$ in $\mathfrak{p}$ unverzweigt, so sind die Frobeniuselemente der Primstellen über $\mathfrak{p}$ zueinander konjugiert, und man schreibt $F_\mathfrak{p}$ für die Konjugationsklasse von $F_\mathfrak{q}$ in G. Man nennt $F_\mathfrak{p}$ auch *Frobeniusklasse von $\mathfrak{p}$*.
Sei S eine Teilmenge von $\mathrm{spec}\,\mathcal{O}_k$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $a_n(S)$ die Anzahl der $\mathfrak{p} \in S$ mit $N(\mathfrak{p}) < n$. Existiert (in $\mathbb{R}$) der Limes

$$d(S) := \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n(S)}{a_n(\mathrm{spec}\,\mathcal{O}_k)}$$

so nennt man $d(S)$ die *Dichte von S*. Bemerke dass falls S endlich ist die Dichte von S existiert und $d(S) = 0$ ist.

THEOREM 2.9 (Čebotarevscher Dichtigkeitssatz). *Sei k ein Zahlkörper und l eine endliche Galoiserweiterung von k mit Galoisgruppe G. Sei X eine unter Konjugation stabile Teilmenge von G, und sei $S_X \subseteq \mathrm{spec}\,\mathcal{O}_k$ die Menge der Primideale von $\mathcal{O}_k$ die in l unverzweigt sind, und deren Frobeniusklasse in X enthalten ist. Dann existiert die Dichte von S_X, und man hat*

$$d(S_X) = \frac{\#X}{\#G}$$

Zur Nachlese stehen unter anderem Čebotarevs Originalarbeit *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören* Math. Annalen **95** (1925), 151-228 zur Auswahl, oder etwas moderner Langs [**15**] chapter VIII §4 theorem 10. Geschichtlichen Hintergrund bieten Stevenhagen P. und Lenstra H.W.Jr. in *Čebotarev and his density theorem* Math. Intelligencer **18** (1996) no.2 26–37.

KOROLLAR 2.10. *Sei k ein Zahlkörper und $\overline{k}|k$ eine (eventuell unendliche) Galoiserweiterung, die ausserhalb einer endlichen Menge $S \subseteq \mathrm{specm}\,\mathcal{O}_K$ unverzweigt ist. Dann liegt die Menge*

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{specm}\,\mathcal{O}_k \setminus S} F_\mathfrak{p}$$

dicht in $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$.

Beweis. Schreibe G für die kompakte topologische Gruppe $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$, und D für die Vereinigung aller $F_\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{specm} \mathcal{O}_K \setminus S$. Sei $g \in G$ und sei V eine offene Umgebung von 1 in G. Es muss gezeigt werden, dass $gV \cap D$ nicht leer ist. In jeder proendlichen Gruppe gibt es einen Filter von Umgebungen der Eins, der aus offenen Normalteilern besteht. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass V ein Normalteiler von G ist. Schreibe $l := \overline{k}^V$, setze

$$W := \bigcup_{h \in G} hgVh^{-1}$$

und schreibe X für das Bild von W im Quotienten $G/V \cong \mathrm{Gal}(l|k)$. Die Erweiterung $l|k$ ist endlich, galoissch und unverzweigt in S, und X ist eine nichtleere konjugationsinvariante Teilmenge von $\mathrm{Gal}(l|k)$. Die Frobeniusklasse von $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Gal}(l|k)$ ist genau dann in X enthalten wenn die Frobeniusklasse von $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ in W enthalten ist. Nach dem Čebotarevschen Dichtigkeitssatz gilt also

$$d(S_X) = d(\{\mathfrak{p} \in \operatorname{specm} \mathcal{O}_k \setminus S \mid F_\mathfrak{p} \subseteq W\}) = \frac{\#X}{\#\,\mathrm{Gal}(l|k)} > 0$$

und das heisst, dass die Menge der $\mathfrak{p} \in \operatorname{specm} \mathcal{O}_K \setminus S$ mit $F_\mathfrak{p} \subseteq W$ unendlich und insbesondere nicht leer ist. Es gibt also ein $d \in D \cap W$, und das bedeutet dass $hdh^{-1} \in gV$ für ein geeignetes $h \in G$. Aber D ist invariant unter Konjugation, und folglich hat man $hdh^{-1} \in D \cap gV \neq \varnothing$. □

Ist wiederum k ein Zahlkörper, $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss von k und ℓ eine Primzahl, und ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}_\ell$–Vektorraum, so bezeichnet man stetige Gruppenhomomorphismen $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ als *ℓ–adische Darstellungen von K*. Ist ρ solch eine ℓ–adische Darstellung, und ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von k, so heisst ρ *unverzweigt in* $\mathfrak{p}$ wenn $\rho(G_T(\mathfrak{q})) = \{\mathrm{id}_V\}$ für jede Primstelle $\mathfrak{q}$ über $\mathfrak{p}$.
Das kann alternativ auch so formuliert werden: Der Kern $\ker \rho$ ist ein abgeschlossener Normalteiler von $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ und damit ist der Fixkörper K_ρ von $\ker \rho$ eine Galoiserweiterung von K. Die ℓ–adische Darstellung ρ ist genau dann unverzweigt in $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p}$ unverzweigt in $K_\rho|K$ ist.

Lemma 2.11. *Sei k ein Zahlkörper, $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss von k und ℓ eine Primzahl. Seien*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{k}|k) \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \qquad \textit{und} \qquad \rho' : \mathrm{Gal}(\overline{k}|k) \longrightarrow \mathrm{GL}(V')$$

stetige, ℓ–adische Darstellungen von k, und sei S eine endlichen Menge von Primstellen von $\mathcal{O}_k$. Für jede Primstelle $\mathfrak{p} \notin S$ von $\mathcal{O}_k$ seien die beiden folgenden Hypothesen erfüllt:

I: *Die Darstellungen ρ und ρ' sind unverzweigt über $\mathfrak{p}$.*
II: *Es gilt $\mathrm{tr}(\rho(F)) = \mathrm{tr}(\rho'(F))$ für alle Elemente $F \in F_\mathfrak{p}$ der Frobeniusklasse von $\mathfrak{p}$.*

Dann haben die $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$–Darstellungen ρ und ρ' die selben Halbvereinfachungen.

Beweis. Die ℓ–adische Darstellung

$$\rho \oplus \rho' : \mathrm{Gal}(\overline{k}|k) \longrightarrow \mathrm{GL}(V \oplus V')$$

ist ausserhalb von S unverzweigt. Sei l der Fixkörper von $\ker(\rho \oplus \rho') = \ker \rho \cap \ker \rho'$. Die Galoiserweiterung $l|k$ ist also ausserhalb der endlichen Menge S unverzweigt, und deshalb (Korollar 2.10) liegt die Vereinigung der Frobeniusklassen $F_\mathfrak{p}$ der Primstellen $\mathfrak{p} \notin S$ dicht in

$$\mathrm{Gal}(l|k) \cong \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)/(\ker\rho \cap \ker\rho')$$

Nun sind aber die Abbildungen $\mathrm{tr}\circ\rho$ und $\mathrm{tr}\circ\rho'$ stetig, und nach der Hypothese (II) gleich auf einer dichten Teilmenge von $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)/(\ker\rho \cap \ker\rho')$. Daraus schliesst man dass $\mathrm{tr}\circ\rho = \mathrm{tr}\circ\rho'$ auf ganz G gilt. Also müssen die Darstellungen ρ und ρ' die selben Halbvereinfachungen haben. □

In der Anwendung (Beweis des Satzes 3.11) werden wir einzig diese letzte Konsequenz des Čebotarevschen Dichtigkeitssatzes benötigen. Die ℓ–adischen Darstellungen ρ und ρ' von k werden direkte Summen von étalen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sein, wobei X und Y Schemata über dem Ganzzahlring $\mathcal{O}_k$ von k mit glatten und eigentlichen generischen Fasern sind. Die Hypothese (I) des Lemmas ist für étale Kohomologiegruppen eigentlicher, glatter Schemata gratis, siehe Bemerkung 3.10. Weil wir im Satz 3.11 annehmen werden dass $\#X(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = \#Y(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}\,\mathcal{O}_k$ gilt, wird auch die Hypothese (II) erfüllt sein. Der Rückschluss von besagter Gleichheit auf die Spuren von ρ und ρ' erfolgt via der Lefschetzschen Fixpunktformel.

KAPITEL 3

p–adische Hodge Theorie

1. Hodge-Tate Darstellungen

1.1. Hodge-Tate Moduln. Legen wir für diesen Abschnitt eine endliche Erweiterung $K/\mathbb{Q}_p$ und einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K fest. Die Bewertung $v : K^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ kann kanonisch in eine Bewertung $v : \overline{K}^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$ fortgesetzt werden. Es bezeichne $\mathbb{C}_p$ die Vervollständigung von $\overline{K}$ und ich schreibe ebenfalls $v : \mathbb{C}_p^* \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$ für die stetige Fortsetzung von v auf $\mathbb{C}_p$. Die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ wirkt stetig auf $\overline{K}$ und damit auch auf $\mathbb{C}_p$.
Allgemeiner kann und muss auch eine getwistete Wirkung von G auf $\mathbb{C}_p$ betrachtet werden: Ist $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}_p^*$ ein Charakter (alias stetiger Gruppenhomomorphismus) von G in $\mathbb{C}_p$, so schreibe $\mathbb{C}_p(\chi)$ für den G–Modul $\mathbb{C}_p$ mittels der Wirkung

$$g \cdot_\chi x = \chi(g) g x$$

Beachte dass weil G kompakt ist, das Bild von G via χ notwendigerweise in den Einheiten von $\mathbb{C}_p$, das ist $U_{\mathbb{C}_p} := \ker(v : \mathbb{C}_p^* \longrightarrow \mathbb{Q})$ enthalten ist.

Beispiel 3.1. Definiere den zyklotomischen Charakter $\chi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*$ dadurch, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle p^n–ten Einheitswurzeln ζ von $\mathbb{C}_p$ die Relation

$$g\zeta = \zeta^{\chi(g)}$$

gilt.

Der zyklotomische Charakter χ spielt eine zentrale Rolle in der p–adischen Hodge–Theorie, weil dieser, und das ist ein nichttriviales Resultat von Tate **[23]**, ein sogenannter *nicht annehmbarer* Charakter ist. Das heisst dass

$$\mathbb{C}_p(\chi^i)^G = \begin{cases} K & \text{wenn } i = 0 \\ 0 & \text{wenn } i \neq 0 \end{cases} \tag{14}$$

gilt. Dies ist eine Aussage kohomologischer Natur, handelt sie doch vom Raum der Fixpunkte des stetigen G–Moduls $\mathbb{C}_p(\chi^i)$, der auch als die 0–te stetige Kohomologiegruppe $H^0_{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{C}_p(\chi^i))$ interpretiert werden kann. Teile dieses Resultats zeige ich im Anhang an dieses Kapitel. Führen wir die folgende Schreibweise ein

$$B_{\mathrm{HT}}(\mathbb{C}_p) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(\chi^i)$$

so ist $B_{\mathrm{HT}}(\mathbb{C}_p)$ ein $\mathbb{Z}$–graduierter $K[G]$–Modul, und (14) bedeutet nichts anderes als dass $B_{\mathrm{HT}}(\mathbb{C}_p)^G = K$ (hier ist K als trivial $\mathbb{Z}$–graduierter K–Vektorraum zu verstehen).
Sei X ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}_p$–Vektorraum, versehen mit einer stetigen und

semilinearen G–Wirkung, was heisst, dass für alle $g \in G$, $c \in \mathbb{C}_p$ und $x \in X$ die Gleichung

$$g(cx) = g(c)g(x)$$

erfüllt ist. Insbesondere ist diese Wirkung K–linear. Vorhin haben wir die mittels eines Charakters getwistete Wirkung von G auf $\mathbb{C}_p$ betrachtet. Analog dazu schreibe $X(\chi^i)$ für den G–Modul X via der getwisteten Wirkung $g \cdot x = \chi^i(g)gx$, und

$$B_{\mathrm{HT}}(X) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X(\chi^i)$$

Man kann das auch als $B_{\mathrm{HT}}(X) := X \otimes B_{\mathrm{HT}}(\mathbb{C}_p)$ sehen. Da $B_{\mathrm{HT}}(X)$ die Struktur eines graduierten $K[G]$–Moduls hat, hat der Raum der Fixpunkte

$$D_{HT}(X) := B_{\mathrm{HT}}(X)^G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X(\chi^i)^G$$

natürlich die Struktur eines graduierten K–Vektorraums. Für alle $i \in \mathbb{Z}$ schreibe $X(i) := X(\chi^i)^G \otimes_K \mathbb{C}_p$, so dass also

$$D_{HT}(X) \otimes_K \mathbb{C}_p = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X(i)$$

Die K–lineare Einbettung $X(\chi^i)^G \xrightarrow{\subseteq} X$ induziert eine $\mathbb{C}_p$–lineare Abbildung $\varepsilon(i) : X(i) \longrightarrow X$, und damit gibt es einen natürlichen Morphismus

$$\varepsilon : D_{HT}(X) \otimes_K \mathbb{C}_p \longrightarrow X \tag{15}$$

So kommen wir zur Definition:

Definition 3.2. Der G–Modul X heisst *vom Typ Hodge–Tate*, wenn die $\mathbb{C}_p$–lineare Abbildung (15) bijektiv ist. Die Aufspaltung von X in die direkte Summe der $X(i)$ wird *Hodge–Tate Zerlegung* genannt. Ist V eine endlichdimensionale stetige Darstellung von G über $\mathbb{Q}_p$, dann nennt man V eine *Hodge–Tate Darstellung* wenn der G–Modul $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ mit diagonaler G–Wirkung vom Typ Hodge-Tate ist.

Beispiel 3.3. Lege $m \in \mathbb{Z}$ fest, und betrachte den $\mathbb{Q}_p$–Vektorraum $V_m := \mathbb{Q}_p$ mit der G–Wirkung $g \cdot x = \chi(g)^m x$ als G–Darstellung über $\mathbb{Q}_p$. Dann ist V_m eine Hodge–Tate Darstellung. Tatsächlich hat man einen kanonischen Isomorphismus von G–Moduln $X := V_m \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}_p(\chi^m)$, und das Resultat (14) von Tate besagt, dass

$$X(i) = \mathbb{C}_p(\chi^{m+i})^G \otimes_K \mathbb{C}_p = \begin{cases} K \otimes_K \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}_p & i = -m \\ 0 \otimes_K \mathbb{C}_p \cong 0 & i \neq -m \end{cases}$$

und somit ist $\varepsilon : D_{HT}(X) \otimes_K \mathbb{C}_p \longrightarrow X$ ein Isomorphismus. Beachte dass ε bloss ein Isomorphismus von $\mathbb{C}_p$–Vektorräumen ist, die jeweiligen G–Wirkungen auf $D_{HT}(X) \otimes_K \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}_p$ und $X \cong \mathbb{C}_p(\chi^m)$ sind verschieden.

1.2. Einfache Eigenschaften von Hodge–Tate Darstellungen. Es gelten die Bezeichnungen und Hypothesen aus dem vorangehenden Abschnitt. Weiter sei V eine endlichdimensionale stetige Darstellung von $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ über $\mathbb{Q}_p$, und schreibe $X := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$. Für $i \in \mathbb{Z}$ nennt man

$$h^i(V) := \dim_K X(i) = \dim_K \left((V \otimes_K \mathbb{C}_p(\chi^i))^G \right) = \dim_K \mathrm{gr}_i \left(D_{HT}(X) \right)$$

i–te Hodge Zahl von V.

Satz 3.4. *Die $\mathbb{C}_p$–lineare Abbildung $\varepsilon : D_{HT}(X) \otimes_K \mathbb{C}_p \longrightarrow X$ ist injektiv. Indbesondere gilt*

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} h^i(V) = \dim_K D_{\mathrm{HT}}(X) \ \leq\ \dim_{\mathbb{C}_p} X = \dim_{\mathbb{Q}_p} V \tag{16}$$

und V ist genau dann eine Hodge–Tate Darstellung wenn in der Ungleichung (16) Gleichheit gilt.

Beweis. Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ wähle eine K–Basis $(e_{ij})_{j\in J(i)}$ von $X(\chi^i)^G$. Falls ε nicht injektiv wäre, müsste eine nichttriviale Linearkombination

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in J(i)} c_{ij} e_{ij} = 0 \tag{17}$$

mit $c_{ij} \in \mathbb{C}_p$ existieren. Nur eine endliche Anzahl der c_{ij} in (17) sind nicht null, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass diese minimal ist, und dass $c_{i_0 j_0} = 1$ für ein gewisses $i_0 \in \mathbb{Z}$ und $j_0 \in J(i_0)$. Für jedes $g \in G$ hat man

$$0 = \chi^{i_0}(g) \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in J(i)} g(c_{ij}) g(e_{ij}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in J(i)} \chi^{i_0 - i}(g) g(c_{ij}) e_{ij} \tag{18}$$

und wenn man (18) von (17) subtrahiert, so erhält man

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in J(i)} \big(c_{ij} - \chi^{i_0-i}(g) g(c_{ij})\big) e_{ij} = 0 \tag{19}$$

Nun ist aber (19) eine kürzere Abhängigkeitsrelation als (17), weil in (19) der Summand $c_{i_0 j_0} - \chi^{i_0 - i_0}(g) g(c_{i_0 j_0}) = 0$ wegfällt. Aufgrund der Minimalität von (17) ist die Relation (19) trivial, das heisst dass für alle i und j, und auch für alle $g \in G$

$$c_{ij} = \chi^{i_0-i}(g) g(c_{ij})$$

gilt, mit anderen Worten $c_{ij} \in C(\chi^{i_0-i})^G$. Die Gleichung (14) zeigt jetzt dass $C(\chi^{i_0-i})^G = \{0\}$ für $i \neq i_0$, und $c_{i_0 j} \in K$. Die Relation (17) ist also bloss

$$\sum_{j\in J(i_0)} c_{i_0 j} e_{i_0 j} = 0$$

mit $c_{i_0 j} \in K$. Da aber $(e_{i_0 j})_{j\in J(i_0)}$ eine K–Basis ist, heisst das, dass in (17) auch $c_{i_0 j} = 0$ ist, i.e. die Relation (17) war trivial. Wir hatten aber das Gegenteil angenommen. □

Satz 3.5. *Sei V eine Hodge–Tate Darstellung, und sei*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von endlichdimensionalen G–Darstellungen über $\mathbb{Q}_p$. Dann sind auch U und W Hodge–Tate Darstellungen, und es gilt insbesondere die Gleichung $h^i(V) = h^i(U) + h^i(W)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Sequenz von G–Moduln

$$0 \longrightarrow U \otimes_K C(\chi^i) \longrightarrow V \otimes_K C(\chi^i) \longrightarrow W \otimes_K C(\chi^i) \longrightarrow 0$$

mit diagonaler G–Wirkung ist exakt, und da der Funktor $(-)^G$ linksexakt ist, erhält man eine exakte Sequenz von K–Vektorräumen

$$0 \longrightarrow (U \otimes_K C(\chi^i))^G \longrightarrow (V \otimes_K C(\chi^i))^G \longrightarrow (W \otimes_K C(\chi^i))^G$$

woraus man schon einmal die Ungleichung $h^i(V) \leq h^i(U) + h^i(W)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ folgert. Da V eine Hodge–Tate Darstellung ist, gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} h^i(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{\mathbb{Q}_p} U + \dim_{\mathbb{Q}_p} W$$

Die Proposition 3.4 liefert nun die Ungleichung

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} h^i(V) \geq \sum_{i\in\mathbb{Z}} h^i(U) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} h^i(W)$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn $h^i(V) = h^i(U) + h^i(W)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. □

Sei $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$ eine Jordan–Hölder Kette von V. Ich erinnere daran, dass dies bedeutet, dass alle Quotienten V_k/V_{k-1} einfach sind, und dass die Halbvereinfachung V^{ss} von V durch

$$V^{\mathrm{ss}} := \bigoplus_{k=1}^{r} V_k/V_{k-1}$$

gegeben ist. Wir haben eine kurze, exakte Sequenz von G–Darstellungen

$$0 \longrightarrow V_{r-1} \longrightarrow V \longrightarrow V/V_{r-1} \longrightarrow 0$$

Der Satz 3.5 zeigt, dass wenn V eine Hodge–Tate Darstellung ist, V_{r-1} und V/V_{r-1} ebenfalls Hodge–Tate Darstellungen sind, und dass in diesem Fall die Gleichheit $h^i(V) = h^i(V_{r-1}) + h^i(V/V_{r-1})$ gilt. Vollständige Induktion über r, und die Tatsache dass $V^{\mathrm{ss}} = V^{\mathrm{ss}}_{r-1} \oplus V/V_{r-1}$ führen zum

Korollar 3.6. *Ist V eine Hodge–Tate Darstellung über K, dann ist es die Halbvereinfachung V^{ss} von V ebenfalls, und es gilt $h^i(V) = h^i(V^{\mathrm{ss}})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.*

2. Zerlegung der étalen Kohomologie

2.1. Der Hauptsatz der p–adischen Hodge–Theorie. Der Hauptsatz der p–adischen Hodge–Theorie besagt, dass die p–adischen étalen Kohomologiegruppen, als Galoisdarstellungen betrachtet, Hodge–Tate Darstellungen sind. Dieser sehr schwierige Satz soll hier aufgestellt, aber nicht bewiesen werden. Wie vorhin bezeichnet K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $\overline{K}$ einen algebraischen Abschluss von K.

Theorem 3.7 (Faltings, **[9]**). *Sei X eine eigentliche, glatte Varietät über K. Die $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$–Darstellung $H^k_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_p)$ ist eine Hodge–Tate Darstellung. Weiter gibt es einen kanonischen und funktoriellen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{i+j=k} H^i(X, \Omega^j_X) \otimes_K \mathbb{C}_p(\chi^{-j}) \cong H^k_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$$

von $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$–Darstellungen, wobei $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ auf $H^i(X, \Omega^j_X)$ trivial wirkt.

Seinen Ursprung findet dieser Satz in Tate's Theorie der p–teilbaren Gruppen **[23]**, wo Tate im Fall abelscher Schemata X (dann ist $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_p)$ der Tate–Modul von X) die Zerlegung

$$H^0(X, \Omega^1_X) \otimes_K \mathbb{C}_p(\chi^{-1}) \oplus H^0(X, \Omega^1_X) \otimes_K \mathbb{C}_p \cong H^1_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$$

beweist und nach der Verallgemeinerung fragt. In seiner vollen Form aufgestellt und bewiesen wurde 3.7 erstmals von Faltings in **[9]**. Ein alternativer Beweis findet sich in **[24]**.

2.2. Wie man Hodge Zahlen aus den Halbvereinfachungen der étalen Kohomologie gewinnt. Sei k ein Zahlkörper, $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss von k, und sei X eine glatte eigentliche Varietät über k. Es soll gezeigt werden, dass die Hodge–Zahlen $h^{ij}(X) := \dim_k(H^i(X, \Omega^j_X))$ von den Halbvereinfachungen der étalen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)$ bestimmt werden:

SATZ 3.8. *Seien X und Y eigentliche, glatte Varietäten über dem Zahlkörper k. Haben $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)$ als* $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$*–Darstellungen die selben Halbvereinfachungen, so haben X und Y die selben Hodge–Zahlen.*

Im Beweis von 3.8 werden wir folgendes Resultat aus der Theorie der étalen Kohomologie brauchen:

BEMERKUNG 3.9. Sei $X_{\overline{k}}$ eine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\overline{k}$ und sei $\overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der $\overline{k}$ enthält. Dann sind die étalen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)$ und $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ in natürlicher und funktorieller Weise isomorph. Das heisst, dass wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{\overline{K}} & \xrightarrow{F} & Y_{\overline{K}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\overline{k}} & \xrightarrow{f} & Y_{\overline{k}} \end{array}$$

kommutiert, so gilt $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, f) = H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, F)$ via diesen Isomorphismus.

BEWEIS VON 3.8. Sei $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von $\mathcal{O}_k$, und $p := \operatorname{char} \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$. Es bezeichne K die Vervollständigung von k in $\mathfrak{p}$, und $\overline{K}$ einen algebraischen Abschluss von K, der $\overline{k}$ enthält. Jedes Element von $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ wirkt auch auf $\overline{k}$, und so identifizieren wir $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ mit einer Teilgruppe von $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$.
Aus der Bemerkung 3.9 folgert man, dass die $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$–Darstellungen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)$ und $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ isomorph sind, wenn $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ via Einschränkung auf $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)$ wirkt.
Insbesondere haben $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ als $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$–Darstellungenen die selben Halbvereinfachungen.
Nach dem Hauptsatz 3.7 hat man einen kanonischen und funktoriellen Isomorphismus von $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$–Darstellungen

$$\bigoplus_{i+l=m} H^i(X_K, \Omega^l_X) \otimes_K \mathbb{C}_p(\chi^{j-l}) \cong H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(\chi^j)$$

In dem man beidseitig dieses Isomorphismus die Fixpunkte unter $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ betrachtet (links fallen alle bis auf einen Summanden weg) erhält man einen Isomorphismus von K–Vektorräumen

$$H^i(X_K, \Omega^j_X) \cong \left(H^{i+j}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(\chi^j)\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)}$$

Insbesondere gilt

$$h^{ij}(X) = h^j(H^{i+j}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$$

Das selbe gilt für Y, und unter Zuhilfenahme des Korollars 3.6 schliesst man

$$h^{ij}(X) = h^j(H^{i+j}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) = h^j(H^{i+j}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)^{\text{ss}})$$

$$= h^j(H^{i+j}_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)^{\text{ss}}) = h^j(H^{i+j}_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) = h^{ij}(Y)$$

was zu zeigen war. □

3. Synthese

Wir kommen nun zum Kernstück dieser Arbeit: Gegeben sind Schemata X und Y von endlichem Typ über dem Ganzzahlring $\mathcal{O}_k$ eines Zahlkörpers k mit eigentlichen und glatten generischen Fasern. Es soll gezeigt werden dass die étalen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ die selben Halbvereinfachungen, und also X und Y die selben Hodge–Zahlen haben, wenn für fast jedes maximale Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_k$ die Gleichheit

$$\#X(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = \#Y(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$$

gilt. Zuerst erinnere ich an ein paar sogenannte elementare Eigenschaften der étalen Kohomologie.

Bemerkung 3.10. Sei k ein Zahlkörper und sei X ein Schema von endlichem Typ über $\mathcal{O}_k$. Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{O}_k$ und $\mathbb{F}_q := \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper, und sei ℓ eine Primzahl. Wir haben nun zwei ℓ–adische Galoisdarstellungen: Zum einen

$$\text{Gal}(\overline{k}|k) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

und zum anderen

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q|\mathbb{F}_q) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell))$$

wobei $\overline{k}$ und $\overline{\mathbb{F}}_q$ algebraische Abschlüsse von k, respektive von $\mathbb{F}_q$ sind, und wobei $X_{\overline{k}} := X \times_{\mathcal{O}_k} \overline{k}$ und $X_{\overline{\mathbb{F}}_q} := X \times_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathbb{F}}_q$. Diese Darstellungen sind beileibe nicht unabhängig. Es seien die folgenden Hypothesen erfüllt:

1 Ist $R := (\mathcal{O}_k)_\mathfrak{p}$ die Lokalisation von $\mathcal{O}_k$ in $\mathfrak{p}$, so ist die Faser $X \times_{\mathcal{O}_k} R$ eigentlich und glatt über R.
2 Der Restklassenkörper $\mathbb{F}_q$ ist nicht von Charakteristik ℓ.

Dann sind die ℓ–adischen Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ kanonisch und in funktorieller Weise isomorph. Das ist der Satz vom eigentlichen–glatten Basiswechsel, nachzulesen in **[17]**, VI, Korollar 4.2. Ist im Speziellen $g \in \text{Gal}(\overline{k}|k)$ ein Element der Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\rho} & H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g^*} \\ H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\rho} & H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell) \end{array}$$

Insbesondere ist $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ als Darstellung von $\text{Gal}(\overline{k}|k)$ unverzweigt in $\mathfrak{p}$, weil wenn g ein Element der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$ ist, so induziert g auf $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ trivialerweise die Identität, und also auch auf $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Satz 3.11. *Sei k ein Zahlkörper, $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss von k. Seien X und Y Schemata von endlichem Typ über $\mathcal{O}_k$. Folgende Hypothesen seien erfüllt:*

I: *Die generischen Fasern $X \times_{\mathcal{O}_k} k$ und $Y \times_{\mathcal{O}_k} k$ sind eigentlich und glatt über k.*

II: *Für fast jedes maximale Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_k$ gilt $\#X(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = \#Y(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$.*

Dann haben die Kohomologiegruppen $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ die selben Halbvereinfachungen als $\mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$–Darstellungen.

Beweis. Sei ℓ eine Primzahl, und sei S eine endliche, genügend grosse Menge von Primstellen von $\mathcal{O}_k$, so dass:

1 X und Y sind glatt und eigentlich über $\operatorname{spec} \mathcal{O}_k \setminus S$.
2 Für alle $\mathfrak{p} \notin S$ gilt $\#X(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = \#Y(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$
3 S enthält alle Primstellen von $\mathcal{O}_k$ die ℓ teilen.

Sei $\mathfrak{p} \notin S$ eine Primstelle von $\mathcal{O}_k$, und schreibe $\mathbb{F}_q$ für den Restklassenkörper $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$. Dieser Restklassenkörper ist endlich, und nicht von Charakteristik ℓ. Sind $\overline{k}$ und $\overline{\mathbb{F}}_q$ algebraische Abschlüsse k respektive $\mathbb{F}_q$, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{Q}_\ell$–Vektorräumen

$$\rho : H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$$

und ist $F : X_{\overline{\mathbb{F}}_q} \longrightarrow X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ der Frobeniusmorphismus hoch q, und $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ ein geometrisches Frobeniuselement in $\mathfrak{p}$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^*"'] & H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[d, "F^*"] \\
H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, "\rho"] & H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)
\end{tikzcd}$$

wie bereits bemerkt (3.10). Die Lefschetzsche Fixpunktformel besagt also via dieses Diagramms, dass

$$\#X(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^*; H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

Das selbe gilt für Y, und so hat man

$$\sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^*; H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \sum_{i=0}^{2\dim Y} (-1)^i \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^*; H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)) \tag{20}$$

Betrachte die Galoisdarstellungen

$$\begin{aligned} V &:= \bigoplus_{i=0}^{\dim X} H^{2i}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \oplus \bigoplus_{i=0}^{\dim Y - 1} H^{2i+1}_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \\ W &:= \bigoplus_{i=0}^{\dim X - 1} H^{2i+1}_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \oplus \bigoplus_{i=0}^{\dim Y} H^{2i}_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \end{aligned}$$

Die Gleichung (20) einmal perfekt gemischt ist nichts anderes als

$$\operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^*; V) = \operatorname{tr}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^*; W) \tag{21}$$

Die Gleichung (21) gilt für alle Primstellen von $\mathcal{O}_k$ ausser diejenigen in S. Weil die Darstellungen V und W ausserhalb S unverzweigt sind (Bemerkung 3.10) können wir 2.11 zur Anwendung zu bringen: Die Darstellungen V und W haben die selben Halbvereinfachungen.
Die Weilsche ex–Vermutung erlaubt es nun, daraus zu schliessen dass $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ und $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ die selben Halbvereinfachungen haben: Legt man nämlich einen Isomorphismus $V^{\text{ss}} \longrightarrow W^{\text{ss}}$ fest, und ist V' ein einfacher Summand von V^{ss}, und W' dessen Bild in W, so müssen die Wurzeln (in $\mathbb{C}$) des Minimalpolynoms von $\text{Frob}^*_{\mathfrak{p}}$ in V' und W' die selben Beträge haben. Wenn also V' aus $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ kommt, so kommt W' aus $H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Der Isomorphismus $V^{\text{ss}} \longrightarrow W^{\text{ss}}$ induziert also einen Isomorphismus

$$H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\text{ss}} \cong H^i_{\text{ét}}(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\text{ss}}$$

für alle i, wie versprochen. □

KOROLLAR 3.12. *Unter den selben Voraussetzungen wie in 3.11 haben X und Y die selben Hodge–Zahlen, das heisst, es gilt*

$$\dim H^i(X, \Omega^j_{X/k}) = \dim H^i(Y, \Omega^j_{X/k})$$

für alle i, j.

BEWEIS. Das folgt unmittelbar aus 3.11 und 3.8. □

4. Anhang: Stetige Galoiskohomologie

4.1. Stetige Kohomologie. Sei G eine topologische Gruppe und A eine abelsche topologische Gruppe versehen mit einer stetigen G–Wirkung, und schreibe C^n für Gruppe der stetigen Abbildungen von G^n nach A. Definiere $d^n : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ durch

$$d^n f(g_1, \ldots, g_{n+1}) =$$
$$g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f(g_1, \ldots, g_j g_{j+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^n f(g_1, \ldots, g_n)$$

Die Elemente von $Z^n_{\text{cont}}(G, A) := \operatorname{im} d^{n-1}$ heissen dann *stetige n–Kozykeln* und die Elemente von $B^n_{\text{cont}}(G, A) := \ker d^n$ *stetige n–Koränder*. Schlussendlich setzte wie üblich

$$H^n_{\text{cont}}(G, A) := \frac{Z^n_{\text{cont}}(G, A)}{B^n_{\text{cont}}(G, A)} = \frac{\text{stetige } n\text{–Kozykeln}}{\text{stetige } n\text{–Koränder}}$$

Man kann $H^0_{\text{cont}}(G, A)$ mit dem Raum der Fixpunkte A^G identifizieren, und entsprechend der Formel oben sind Elemente von $H^1_{\text{cont}}(G, A)$ Klassen von Funktionen $\sigma : G \longrightarrow A$ die

$$\sigma(gh) = f(g) + g\sigma(h)$$

erfüllen, modulo Funktionen der Form $g \longmapsto ga - a$ für ein $a \in A$. Besteht keine Verwechslungsgefahr, so schreibe ich $H^n(G, -)$ für $H^n_{\text{cont}}(G, -)$. Natürlich ist $H^*_{\text{cont}}(G, -)$ ein Funktor, der übrigens auch als abgeleiteter Funktor des Fixpunktfunktors $(-)^G$ in einer entsprechenden Kategorie angesehen werden kann.

4.2. Der Satz von Tate-Ax. Legen wir einen diskret bewerteten, vollständigen Körper (K, v) von Charakteristik 0 und perfektem Restklassenkörper κ, und einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K fest. Es bezeichne C die Vervollständigung von $\overline{K}$. Die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ wirkt dann stetig auf C. Die Berechnung der Kohomologie $H^*_{\mathrm{cont}}(G, C)$ entpuppt sich als schwierie Aufgabe.

Theorem 3.13 (Tate [**23**], Ax [**1**]). *$C^G = K$.*

Dieser Satz wurde erstmals 1966 von John Tate in [**23**] aufgestellt und bewiesen. Vorab einige Bemerkungen zum Beweis. Der widerspenstige Teil besteht natürlich darin die Inklusion $C^G \subseteq K$ nachzuweisen. Die Idee ist folgende: Betrachte $z \in C^G$. Da K vollständig, und damit abgeschlossen in C ist, genügt es zu zeigen dass Elemente von K beliebig nahe von z gefunden werden können. Wähle also ein $y \in \overline{K}$ nahe bei z. Die (ultrametrische) Dreiecksungleichung zeigt dann, dass für alle $g \in G$

$$v(y - gy) = v(y - z + gz - gy) \geq v(z - y)$$

Das heisst, setzt man

$$\Delta(y) := \min\{v(y - gy) \mid g \in \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)\}$$

so ist $\Delta(y)$ gross, beziehungsweise alle zu y konjugierten Elemente liegen nahe bei y. Mit anderen Worten lässt die Galoisgruppe y beinahe invariant. Einer Idee von James Ax ([**1**]) folgend werden wir zeigen dass in der Nähe eines solchen Fastfixpunktes y auch ein echter Fixpunkt, das heisst ein Element von K existiert.

Lemma 3.14. *Sei $f \in \overline{K}[X]$ ein Polynom vom Grad n, und $0 \leq q < n$. Sei y eine Wurzel von f. Dann gibt es Wurzeln x von $f^{(q)}$ und y' von f die der Ungleichung*

$$v(y - x) \geq v(y - y') - \frac{v(\binom{n}{q})}{n - q}$$

genügen.

Beweis. Man kann, in dem man $f(X)$ durch $f(X - y)$ ersetzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $y = 0$ ist, und dass f unitär ist. Sei y' eine Wurzel von f so dass $v(y)$ minimal ist, und schreibe

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

Der Koeffizient a_i ist eine Summe von Produkten der Wurzeln von f, wobei jedes dieser Produkte genau $n - i$ Faktoren enthält. Daher die einfache Abschätzung $v(a_i) \geq (n - i)v(y')$. Die q–te Ableitung von f ist

$$f^{(q)}(X) = \frac{n!}{(n-q)!}\prod_{i=1}^{n-q}(X - x_i) = \sum_{i=0}^{n-q} b_i X^i$$

Man hat $b_0 = q!a_q$ und daher $v(b_0) \geq v(q!) + (n - q)v(y_n)$. Andererseits

$$v(b_0) = v\left(\frac{n!}{(n-q)!}\prod_{i=1}^{n-q}(-x_i)\right) = v(n!) - v((n-q)!) + \sum_{i=1}^{n-q} v(x_i)$$

was die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n-q} v(x_i) \geq (n-q)v(y') - v\left(\binom{n}{q}\right)$$

ergibt. Daraus schliesst schliesst man, dass

$$v(x) \geq v(y') - \frac{v(\binom{n}{q})}{n-q}$$

für mindestens eine Wurzel x von $f^{(q)}$, und das war zu zeigen. □

LEMMA 3.15. *Sei $y \in \overline{K}$, und $n := [K(y) : K]$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit*

$$v(x-y) \geq \Delta(y) - \sum_{i=1}^{\lambda(n)} (p^i - p^{i-1})^{-1} v(p)$$

wobei $\lambda(n) := \max\{e \in \mathbb{N} \mid p^e \leq n\}$.

BEWEIS. Wir führen den Beweis mittels Induktion über n. Die Aussage ist trivial falls $n = 1$, weil dann $y \in K$ und demzufolge $v(y-y) = v(0) = \infty$. Nehmen wir also an dass $n > 1$. Es geht nun darum q genügend schlau zu wählen. Dazu betrachte zwei Fälle: Erstens den Fall wo $n = p^s$. Hier wähle $q := p^{s-1}$. Da p aber nicht p^2 den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{q}$ teilt, gilt in diesem Fall $v(\binom{n}{q}) = v(p)$. Ist n nicht eine Potenz von p, so setze $q = p^s$ wobei $n = p^s d$ und $(p,d) = 1$. Dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{q}$ kein Vielfaches von p und deshalb gilt in diesem Fall $v(\binom{n}{q}) = 0$.
Sei f das Minimalpolynom von y über K. Das Lemma 3.14 garantiert die Existenz einer Wurzel x von $f^{(q)}$ mit

$$v(y-x) \geq \Delta(y) - \frac{v(\binom{n}{q})}{n-q}$$

Für alle $g \in \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ rechnet man nach

$$v(x-gx) = v(x-y+y-gy+gy-gx) \geq \min\{v(x-y), \Delta(y)\}$$

was bedeutet, dass

$$\Delta(x) \geq \Delta(y) - \frac{v(\binom{n}{q})}{n-q}$$

Da $[K(x) : K] \leq (n-q) < [K(y) : K]$, kann auf x die Rekurrenzhypothese angewandt werden; es gibt ein $w \in K$ mit

$$\begin{aligned} v(w-x) &\geq \Delta(x) - \sum_{i=1}^{\lambda(n-q)} (p^i - p^{i-1})^{-1} v(p) \\ &\geq \Delta(y) - \frac{v(\binom{n}{q})}{n-q} - \sum_{i=1}^{\lambda(n-q)} (p^i - p^{i-1})^{-1} v(p) \\ &\geq \Delta(y) - \sum_{i=1}^{\lambda(n)} (p^i - p^{i-1})^{-1} v(p) \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung betrachte die Fälle $n = p^s$ und $n = p^s d$ separat. So findet man

$$v(y-w) \geq \min\{v(y-x), v(x-w)\} = \Delta(y) - \sum_{i=1}^{\lambda(n)} (p^i - p^{i-1})^{-1} v(p)$$

was zu zeigen war. $\square$

KOROLLAR 3.16. *Sei $y \in \overline{K}$. Dann existiert ein $x \in K$ mit*

$$v(x-y) \geq \Delta(y) - \frac{p}{(p-1)^2} v(p)$$

BEWEIS. Das folgt aus der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} (p^i - p^{i-1})^{-1} = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i} = \frac{p}{(p-1)^2}$$

und dem Lemma 3.15. $\square$

BEMERKUNG 3.17. Man kann sich dazu ein paar interessante Fragen stellen. Zunächst diese: Ist in 3.16 der Term $-p(p-1)^{-2}v(p)$ wirklich notwendig? Die Antwort lautet hier "ja", ein explizites Beispiel wo dieser Term nicht weggelassen werden kann findet sich in [**1**], §4. Allerdings gibt es Fälle, in denen $-p(p-1)^{-2}$ durch eine bessere Schranke ersetzt werden kann. Schreibe $\Gamma(K)$ für die Menge aller $r \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $y \in \overline{K}$ ein $x \in K$ mit

$$v(x-y) \geq \Delta(y) - r\, v(p)$$

existiert, und setze dann $\gamma(K) := \inf \Gamma(K)$. Diese Definition macht allgemein Sinn für diskret bewertete Körper. Es ist klar dass in jedem Fall $0 \leq \gamma(K)$. In dieser Schreibweise zeigt der Korollar 3.16 nichts anderes als dass $\gamma(K) \leq p(p-1)^{-2}$. Es wäre natürlich interessant etwa die Werte $\gamma(\mathbb{Q}_p)$ zu bestimmen.

BEWEIS VON 3.13. Da offensichtlich K in C^G enthalten ist, reicht es zu zeigen dass $C^G \subseteq K$. Sei $z \in C^G$. Da C hausdorffsch und K vollständig ist, ist K topologisch abgeschlossen in C, und es reicht zu zeigen dass für jedes $N \in \mathbb{Z}$ ein $x \in K$ mit $v(z-x) \geq N$ existiert. Per Definition liegt $\overline{K}$ dicht in C, und deshalb existiert ein $y \in \overline{K}$ so dass

$$v(z-y) \geq N + p(p-1)^{-2} v(p)$$

Für alle $g \in G$ gilt

$$v(y-gy) = v(y-z+gz-gy) \geq v(y-z) \geq N + p(p-1)^{-2} v(p)$$

was heisst, dass $\Delta(y) \geq N + p(p-1)^{-2} v(p)$. Der Korollar 3.16 garantiert die Existenz eines Elements $x \in K$ mit $v(x-y) \geq N$. Schlussendlich folgert man, dass

$$v(z-x) \geq \min\{v(z-y), v(x-y)\} = N$$

und somit wie angekündigt, dass $C^G = K$. $\square$

4.3. Annehmbare Charaktere. Ist $\chi : G \longrightarrow C^*$ ein Charakter, so schreibe $C(\chi)$ für den G–Modul C mit getwisteter Wirkung:

$$g \cdot_\chi x = \chi(g)gx$$

Mich interessiert die stetige Kohomologie $H^*(G, C(\chi))$. Führen wir folgende Terminologie ein:

Definition 3.18 (Serre). Sei $\chi : G \longrightarrow C^*$ ein Charakter. Wir sagen, dass χ *annehmbar* ist, wenn $\dim_K C(\chi)^G = 1$.

Der Satz 3.13 sagt aus, dass der triviale Charakter annehmbar ist. Ein einfacher Korollar davon ist:

Korollar 3.19. *Entweder χ ist annehmbar, oder aber $C(\chi)^G = \{0\}$. Das heisst es gilt in jedem Fall* $\dim_K C(\chi)^G \leq 1$

Beweis. Sei $z \in C(\chi)^G$. Ist $C(\chi)^G = \{0\}$ so ist nichts zu zeigen. Andernfalls existiert $y \in C(\chi)^G$ mit $y \neq 0$. Es reicht zu zeigen dass $zy^{-1} \in K$, oder eben dass $zy^{-1} \in C^G$. Tatsächlich hat man

$$\sigma(zy^{-1}) = \frac{\sigma(z)}{\sigma(y)} = \frac{\chi(\sigma)\sigma(z)}{\chi(\sigma)\sigma(y)} = zy^{-1}$$

für alle $\sigma \in G$. □

Ich schreibe $A(K)$ für die Menge der annehmbaren Charaktere. Ist $\chi \in A(K)$ ein annehmbarer Charakter, so gilt $\operatorname{im}\chi \subseteq K^*$, das heisst, ein annehmbarer Charakter ist automatisch ein Element von $\mathrm{Hom}(G, K^*)$. Um das zu sehen, wähle ein $z \in C^*$ mit $\chi(g)gz = z$ für alle $g \in G$. Dann ist $\chi : G \longrightarrow C^*$ gegeben durch

$$\chi : g \longmapsto \frac{z}{g(z)}$$

Nun ist aber χ ein Charakter, und deshalb gilt für alle g und h in G

$$1 = \frac{\chi_z(g)\chi_z(h)}{\chi_z(gh)} = \frac{z^2 g(h(z))}{g(z)h(z)z} = \frac{\frac{z}{h(z)}}{g\left(\frac{z}{h(z)}\right)} \tag{22}$$

das heisst, dass $\chi(h) = h(z)^{-1}z \in K^*$ für alle $h \in G$. Tatsächlich bilden die annehmbaren Charaktere eine Teilgruppe von $\mathrm{Hom}(G, K^*)$. Wir haben bereits gezeigt dass der triviale Charakter annehmbar ist. Sind χ_1 und χ_2 annehmbare Charaktere, und sind z_1 und z_2 Elemente von C^* so dass $\chi_1(g)gz_1 = z_1$ und $\chi_2(g)gz_2 = z_2$ für alle $g \in G$, dann hat man

$$\chi_1\chi_2(g)g(z_1z_2) = \chi_1(g)g(z_1)\chi_2(g)g(z_2) = z_1z_2$$

was zeigt, dass $\chi_1\chi_2$ annehmbar ist.
Ein Charakter $\chi : G \longrightarrow C^*$ ist annehmbar, wenn und nur wenn ein $z \in C^*$ existiert so dass $\chi(g)gz = z$ für alle $g \in G$. Solch ein z ist bis auf ein Vielfaches in K^* eindeutig, das folgt aus der Definition und dem Korollar 3.19. Man hat also eine Funktion

$$\alpha : A(K) \longrightarrow C^*/K^*$$

Wir haben eben nicht nur gezeigt, dass $A(K)$ eine Teilgruppe von $\mathrm{Hom}(G, K^*)$ ist, sondern auch, dass $\alpha : A(K) \longrightarrow C^*/K^*$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Weiter zeigt man leicht, dass α injektiv ist: Ist nämlich $\alpha(\chi) = [1]$, so gilt $\chi(g)g(1) = 1$

für alle $g \in G$, und somit ist χ trivial. Ein $z \in C^*$ ist im Bild von α wenn und nur wenn die Funktion

$$\chi_z : g \longmapsto \frac{z}{g(z)}$$

ein Charakter ist, und das widerum ist genau dann der Fall, wenn $g(z)z^{-1} \in K^*$ für alle $g \in G$ (vgl. (22)). Betrachtet man auf dem Quotienten C^*/K^* die natürliche G–Wirkung, so bedeutet das, dass $\operatorname{im}\alpha = (C^*/K^*)^G$. Wir haben damit nachgewiesen:

SATZ 3.20. *Die Menge der annehmbaren Charaktere $A(K)$ ist eine Teilgruppe von $\operatorname{Hom}(G, K^*)$, und man hat einen natürlichen Isomorphismus $A(K) \cong (C^*/K^*)^G$.*

Das folgende Resultat liefert ausser dem trivialen Charakter weitere Beispiele für annehmbare Charaktere:

SATZ 3.21. *Sei $\chi : G \longrightarrow C^*$ ein Charakter. Dann sind äquivalent:*
- I: *Das Bild von χ in K^* ist endlich.*
- II: *Der Charakter χ ist annehmbar und $C(\chi)^G$ ist in $\overline{K}$ enthalten.*

BEWEIS. Ist $C(\chi)^G \subseteq \overline{K}$ und nicht trivial, so existiert ein $z \in \overline{K}^*$, so dass $\chi(g) = zg(z)^{-1}$ für alle $g \in G$. Da aber die Bahn von z unter der Wirkung von G nur endlich ist, kann $\chi(g)$ nur endlich viele Werte annehmen. Ist andererseits $\operatorname{im}\chi$ endlich, und insbesondere diskret in K^*, so kann man χ auch als stetigen Kozyklus $\chi : G \longrightarrow \overline{K}^*$ ansehen, und zwar für die diskrete Topologie auf $\overline{K}^*$. Hilberts Satz 90 garantiert die Existenz eines $z \in \overline{K}^*$ so dass $\chi(g)g(z) = z$ für alle $g \in G$. □

4.4. Kohomologische Interpretation. Die kurze exakte Sequenz von G–Moduln $1 \longrightarrow K^* \longrightarrow C^* \longrightarrow C^*/K^* \longrightarrow 1$ induziert eine lange exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow (K^*)^G \longrightarrow (C^*)^G \longrightarrow (C^*/K^*)^G \longrightarrow H^1(G, K^*) \longrightarrow H^1(G, C^*) \longrightarrow \cdots$$

Die Gleichheit $(K^*)^G = (C^*)^G$ kennen wir schon seit längerem, und so findet man eine lange exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow A(K) \longrightarrow \operatorname{Hom}(G, K^*) \longrightarrow H^1(G, C^*) \longrightarrow \cdots$$

wobei der Morphismus $A(K) \longrightarrow \operatorname{Hom}(G, K^*)$ die Inklusion ist. Untersuchen wir nun die Kohomologiegruppe $H^1(G, C^*)$.
Schreibe U_C für die Einheiten von C, das ist $U_C = \ker(v : C^* \longrightarrow \mathbb{Q})$, und betrachte die kurze, exakte Sequenz von G–Moduln

$$1 \longrightarrow U_C \xrightarrow{\subseteq} C^* \xrightarrow{v} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

wobei G trivial auf die diskrete (!) Gruppe $\mathbb{Q}$ wirkt. Diese kurze Sequenz induziert eine lange, exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow (U_C)^G \longrightarrow (C^*)^G \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow H^1(G, U_C) \longrightarrow H^1(G, C^*) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

Man hat $H^1(G, \mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}(G, \mathbb{Q}) = 0$ weil $\mathbb{Q}$ diskret und torsionsfrei und G kompakt ist. Weiter gilt $(C^*)^G = K^*$ und $(U_C)^G = U_K$ aufgrund des bereits bewiesenen Teils von 14. Die obige Sequenz wird also zu

$$1 \longrightarrow U_K \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow H^1(G, U_C) \longrightarrow H^1(G, C^*) \longrightarrow 0$$

Da $\operatorname{im}(v : K^* \longrightarrow \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$ ergibt das eine kurze, exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow H^1(G, U_C) \longrightarrow H^1(G, C^*) \longrightarrow 0 \tag{23}$$

Es bezeichne $U_C^1 := \{u \in U_C \mid v(1-u) > 0\}$. Identifiziere den Restklassenkörper $\overline{\kappa}$ von C mit den multiplikativen Repräsentanten in C (siehe dazu Serre, [**18**], chapitre II, §4 proposition 8), so dass $U_C = U_C^1 \times \overline{\kappa}^*$. Man kann damit den *Logarithmus* $\log : U_C \longrightarrow C$ wie folgt definieren: Man setzt $\log(x) = 0$ wenn $x \in \overline{\kappa}^*$ und

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

wenn $x \in U_C^1$. Der Logarithmus $\log : U_C \longrightarrow C$ ist ein surjektiver, stetiger G–äquivarianter Gruppenhomomorphismus, und der Kern ist

$$\ker \log = \mu_{p^\infty}(\overline{K}) \times \overline{\kappa}^*$$

wobei $\mu_{p^\infty}(\overline{K})$ für die p^n–ten Einheitswurzeln von $\overline{K}$ (respektive C) steht. Ich schreibe kurz $N := \ker \log$. Man weiss, dass der Logarithmus ein lokaler Isomorphismus ist, und deshalb ist N eine diskrete Teilgruppe von C^*. Die kurze, exakte Sequenz von G–Moduln

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\subseteq} U_C \xrightarrow{\log} C \longrightarrow 0$$

induziert eine lange, exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N^G \longrightarrow (U_C)^G \longrightarrow C^G \longrightarrow H^1(G,N) \longrightarrow H^1(G,U_C) \longrightarrow H^1(G,C) \longrightarrow \cdots$$

die wiederum aufgrund des Satzes 3.13 und der Gleichheit $N^G = \mu_{p^\infty}(K) \times \kappa^*$ zu

$$1 \longrightarrow \mu_{p^\infty}(K) \times \kappa^* \longrightarrow U_K \xrightarrow{\log} K \longrightarrow H^1(G,N) \longrightarrow H^1(G,U_C) \longrightarrow H^1(G,C)$$

wird. Zusammen mit der Sequenz (23) findet man

$$\begin{tikzcd}
 & & H^1(G,N) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi\circ\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\beta\circ\iota"'] & H^1(G,U_C) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & H^1(G,C^*) \arrow[r] & 1 \\
 & & H^1(G,C) & &
\end{tikzcd}$$

Zeigen wir dass sowohl $\beta \circ \iota = 0$ als auch $\pi \circ \alpha = 0$ gilt. Die Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Torsionsgruppe, und $H^1(G,C)$ ist ein K–Vektorraum, und damit torsionsfrei, was $\beta \circ \iota = 0$ erzwingt. Sei $[\chi]$ ein Element von $H^1(G,N)$, repräsentiert durch den Kozyklus $\chi : G \longrightarrow N$. Dann ist $\pi \circ \alpha([\chi])$ ebenfalls durch den Kozyklus $\chi : G \longrightarrow N \subseteq C$ repräsentiert. Die Gruppe N ist aber diskret und G ist kompakt. Darum muss das Bild von χ endlich sein, und wir wissen bereits (Satz 3.21), dass in diesem Fall $\pi \circ \alpha([\chi]) = 0$ in $H^1(G,C)$. Damit haben wir nachgewiesen dass auch $\pi \circ \alpha = 0$. Daraus, und aus einer kurzen Diagrammjagd ergibt sich die Existenz eines injektiven Morphismus

$$L : H^1(G,C^*) \longrightarrow H^1(G,C)$$

so dass $L \circ \pi = \beta$. Ein Charakter $\chi : G \longrightarrow C^*$ hat sowieso schon Werte in U_C und deshalb gilt einfach $L([\chi]) = \beta([\chi]) = [\log \circ \chi]$. Aus der Injektivität von L ergibt sich

Satz 3.22. *Der Charakter* $\chi : G \longrightarrow C^*$ *ist annehmbar wenn und nur wenn ein* $y \in C$ *existiert so dass* $\log \chi(g) = y - g(y)$ *für alle* $g \in G$.

Korollar 3.23. *Sei* $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. *Der Charakter* χ *ist annehmbar wenn und nur wenn* χ^n *es ist.*

Beweis. Wir wissen bereits dass wenn χ annehmbar ist, auch χ^n annehnmbar ist. Ist umgekehrt χ^n annehmbar, dann existiert nach der Proposition 3.22 ein $y \in C$ so dass $\log \chi^n(g) = y - g(y)$ für alle $g \in G$. Da $\log \chi^n(g) = n \log \chi(g)$, gilt

$$\log \chi(g) = \frac{y}{n} - g\left(\frac{y}{n}\right)$$

und damit zeigt 3.22 dass χ annehmbar ist. □

4.5. Was noch fehlt. Um die Gleichung (14) im ersten Abschnitt des Kapitels vollständig zu beweisen fehlt jetzt eigentlich nur noch die Information dass für den zyklotomische Charakter χ der Raum $C(\chi)$ keine nichttrivialen Fixpunkte unter der Wirkung von G hat. Tatsächlich weiss man folgendes:

Definition 3.24. Sei $\chi : G \longrightarrow \mathbb{Q}_p^*$ ein Charakter. Man sagt χ sei *unendlich verzweigt* wenn es eine unendlich verzweigte Erweiterung K_∞ von K gibt, so dass die Einschränkung von χ auf $\mathrm{Gal}(K_\infty|K)$ injektiv ist.

Beispiel 3.25. Der zyklotomische Charakter ist unendlich verzweigt: Tatsächlich kann man für K_∞ den Körper $\mathbb{Q}_p$ zusammen mit allen p^n–ten Einheitswurzeln nehmen. Dann hat man nämlich $\mathrm{Gal}(K_\infty|\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p^*$, und die Einschränkung $\chi : \mathrm{Gal}(K_\infty|\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*$ ist ein Isomorphismus.

Theorem 3.26. *Ist* $\chi : G \longrightarrow \mathbb{Q}_p^*$ *unendlich verzweigt, so ist* χ *nicht annehmbar. Insbesondere ist der zyklotomische Charakter nicht annehmbar.*

Für den Beweis dieses Satzes verweise ich auf [**23**].

KAPITEL 4

p–adische Integration

Programmansage. Ist K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und X ein glattes Schema endlichen Typs über K, so kann man auf der Menge der K–rationalen Punkte $X(K)$ die Struktur einer *p–adisch analytischen Mannigfaltigkeit* einführen, und Differentialformen auf $X(K)$ definieren, die man dann auch integrieren kann. Allerdings sollte man sich im Klaren darüber sein, dass man unter einer p–adisch analytischen Mannigfaltigkeit so manches verstehen kann. Unsere Definition (4.8) ist in voller Absicht die naivstmögliche, die aus $X(K)$ einen total unzusammenhängenden topologischen Raum macht, so dass es überhaupt keine Obstruktion zwischen dem Lokalen und dem Globalen gibt (vgl. auch Bemerkung 4.10). Insbesondere werden lokaltriviale Bündel auf $X(K)$ immer trivial sein, und immer globale Schnitte haben, und genau das brauchen wir um zu überleben.

1. Schemata über einem topologischen Körper

1.1. Topologische Struktur. Sei K ein Körper versehen mit einer Topologie die mindestens T_0 ist, das heisst Punkte in K sind abgeschlossen. Für den Moment nehmen wir nicht an, dass diese Topologie auf K mit den Operationen auf K kompatibel ist. Sei X ein Schema über K. Ich schreibe wie üblich $X(K) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{spec}\, K}(\mathrm{spec}\, K, X)$ für die Menge der K–rationalen Punkte auf X. Es soll zunächst gezeigt werden, dass die Topologie auf K in natürlicher Weise eine Topologie auf $X(K)$ induziert. Das geht so: Betrachte zuerst ein affines Schema $X = \mathrm{spec}\, A$ über K. Die Elemente von $A = \mathcal{O}_X(X)$ können als K–wertige Funktionen auf der Menge der K–rationalen Punkte auf X angesehen werden: Für $f \in A$ und $x \in X(K) \cong \mathrm{Hom}_{K-\mathbf{Alg}}(A, K)$ setzte einfach $f(x) = x(f)$. Somit haben wir eine Familie von Abbildungen

$$\big(f : X(K) \longrightarrow K\big)_{f \in A}$$

von der Menge $X(K)$ in den topologischen Raum K, und können auf $X(K)$ die initiale Topologie betrachten, das ist, die gröbste Topologie auf $X(K)$, so dass alle $f \in A$ stetig sind. Eine Basis für diese Topologie ist

$$\big\{f^{-1}(U) \mid f \in A, U \subseteq K \text{ offen}\big\}$$

Ist nun X ein dummerweise nicht affines Schema über K, so ist klar was zu tun ist: Führe für jedes offene affine Teilschema $Y \subseteq X$ die oben definierte Topologie auf $Y(K)$ ein, und nimm dann auf $X(K)$ die finale Topologie induziert durch alle Inklusionen $Y(K) \longrightarrow X(K)$. Alternativ kann man anstatt alle affinen $Y \subseteq X$ auch nur eine X überdeckende Familie von affinen Subschemata betrachten, man erhält

stets dieselbe Topologie auf $X(K)$.[1]
Die so definierte Topologie auf $X(K)$ soll *von K induzierte Topologie* oder einfach *die feine Topologie* heissen. Es sei hier noch bemerkt, dass für einen topologischen Körper L jeder stetige Morphismus von K–Algebren $K \longrightarrow L$ in natürlicher und funktorieller Weise eine stetige Einbettung $X(K) \longrightarrow X(L)$ induziert. Da alle hier betrachteten Topologien das T_0–Axiom erfüllen, sind die induzierten Topologien stets feiner als die übliche Zariskitopologie.
Die altbekannte Zariskitopologie ist ein Spezialfall dieser Konstruktion, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4.1. Sei K ein Körper versehen mit der koendlichen Topologie τ, und sei X eine Varietät über K. Die K–rationalen Punkte $X(K)$ von X können als Teilmenge der abgeschlossenen Punkte von X angesehen werden. Die von τ induzierte Topologie auf $X(K)$ ist dann nichts anderes als die übliche Zariskitopologie auf $X(K)$. Beachte dass (K, τ) kein topologischer Körper ist (ausser wenn K endlich und somit diskret ist), i.e. Addition und Multiplikation sind für diese Topologie im Allgemeinen nicht stetig.

Beispiel 4.2. Betrachte den Körper $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit der üblichen Topologie, und eine glatte Varietät X über K. Dann ist die feine Topologie auf $X(K)$ die Topologie die X als reelle, beziehungsweise komplexe Mannigfaltigkeit trägt. Das ist intuitiv klar, und soll später bewiesen werden.

Beispiel 4.3. Ist K ein Körper versehen mit irgend einer Topologie, und ist $X = \operatorname{spec} K[X]$, so kann man $X(K)$ kanonisch mit K identifizieren, und unter dieser Identifikation stimmt die feine Topologie auf $X(K)$ mit der Topologie auf K überein.

Das letzte Beispiel funktioniert natürlich nicht mit $X = \operatorname{spec} K[X_1, \ldots, X_n]$ und der Produkttopologie auf K^n, man sieht ja leicht, dass etwa die übliche Zariskitopologie auf K^n nicht das Produkt der Zariskitopologien auf K ist. Ist aber K ein *topologischer Körper*, das heisst sind Addition und Multiplikation als Funktionen von K^2 nach K und die Inversion $K^* \longrightarrow K^*$ stetig, so funktioniert das Beispiel, und das sogar noch allgemeiner, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 4.4. *Sei K ein topologischer Körper und X eine affines Schema von endlichem Typ über K, das heisst $X = \operatorname{spec} A$ mit $A = K[X_1, \ldots, X_n]/I$ für ein Ideal $I \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$. Setzte $V(I) := \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \,\forall\, f \in I\}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \beta: & V(I) & \longrightarrow & X(K) \\ & x & \longmapsto & f \longmapsto f(x) \end{array}$$

ein Homeomorphismus für die feine Topologie auf $X(K) = \operatorname{Hom}_{K-\mathbf{Alg}}(A, K)$ und für die von der Produkttopologie auf K^n induzierte Topologie auf $V(I)$.

Beweis. Die Abbildung β ist injektiv: Seien $x, y \in V(I)$, und $\beta(x) = \beta(y)$. Das heisst, dass $\beta(x)(f) = \beta(y)(f)$ für jedes $f \in A$, oder anders geschrieben dass $f(x) = f(y)$ für jedes $f \in A$. Da A Punkte in $V(I)$ separiert heisst das, dass $x = y$.
Die Abbildung β ist surjektiv: Sei $\varphi : A \longrightarrow K$ ein Morphismus von K–Algebren. Definiere $x \in V(I)$ als $x = (\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n))$. Man hat dann $\varphi(f) = f(x)$ für alle

[1]Man hätte auch gleich sagen können, dass der Funktor $Y \longmapsto Y(K)$ eine Garbe auf X mit Werten in der dualen Kategorie der Kategorie der Mengen ist.

$f \in A$, und damit $\varphi = \beta(x)$.
Es bleibt die Stetigkeit von β und β^{-1} zu zeigen. Die von der Produkttopologie kommende Topologie auf $V(I)$ ist die initiale Topologie induziert von allen Koordinatenfunktionen, und die Bijektion β transportiert die feine Topologie auf $X(K)$ offensichtlich die initiale Topologie von $(f : V(I) \longrightarrow K)_{f\in A}$. Diese transportierte Topologie ist a priori feiner als die von der Produkttopologie herkommende, weil alle Koordinatenfunktionen auch Elemente von A sind. Da wir aber angenommen haben, dass Multiplikation und Addition auf K stetig sind, sind alle polynomialen Funktionen $f : V(I) \longrightarrow K$, das heisst Produkte und Summen von Koordinatenfunktionen, bereits für die Produkttopologie stetig. Die beiden Topologien sind also gleich, was zum erhofften Schluss führt. □

1.2. Garben. Wie wir eben gezeigt haben induzieren für jede Zariski–offene Teilmenge $U \subseteq X$ die regulären Funktionen $f \in \mathcal{O}_X(U)$ stetige, Funktionen auf $U(K) \subseteq X(K)$ mit Werten in K. Aus allen diesen so erhaltenen Funktionen auf offenen Teilmengen von $X(K)$ können wir eine Garbe $\mathcal{R}$ auf $X(K)$ zusammenflicken, die *Garbe der lokalregulären Funktionen* heissen soll. Ich präzisiere das:

Definition 4.5. Sei X ein Schema über K und V eine offene Teilmenge von $X(K)$ für die feine Topologie. Eine Funktion $\varphi : V \longrightarrow K$ heisst *lokalregulär*, wenn für jeden Punkt $x \in V$ eine feine Umgebung $V' \subseteq V$ von x, eine Zariskiumgebung U von x in X und eine reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}_X(U)$ existiert, so dass $\varphi(y) = f(y)$ für alle $y \in V' \cap U(K)$.

Jede reguläre Funktion $f \in \mathcal{O}_X(U)$ induziert natürlich eine lokalreguläre Funktion auf $U(K)$, aber es ist im Allgemeinen falsch dass jede lokalreguläre Funktion auf $U(K)$ auf diese Weise von einer regulären Funktion $f \in \mathcal{O}_X(U)$ herrührt. Das kommt daher, dass $U(K)$ in der feinen Topologie nicht notwendigerweise zusammenhängend ist.
Es soll gezeigt werden, dass jeder lokal freie, endlichrangige $\mathcal{O}_X$–Modul auf X einen lokal freien $\mathcal{R}$–Modul auf $X(K)$ vom selben Rang induziert.
Sei also M ein lokal freier $\mathcal{O}_X$–Modul vom Rang n. Verabreden wir uns auf die Schreibweise $M_{\mathcal{R}}$ für den auf $X(K)$ zu definierenden $\mathcal{R}$–Modul. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine (Zariski–)offene Abdeckung von X die M trivialisiert, und sei für alle $i \in I$

$$f_{1,i}, \ldots, f_{n,i} \in M(U_i)$$

eine $\mathcal{O}_X(U_i)$–Basis von $M(U_i)$. Für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ gibt es ein $\tau_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j))$ so dass $\tau_{ij} f_j|_{U_i\cap U_j} = f_i|_{U_i\cap U_j}$. Die τ_{ij}'s erfüllen auf der Schnittmenge $U_i \cap U_j \cap U_k$ die Relation

$$\tau_{ij}\tau_{jk} = \tau_{ik} \tag{24}$$

wann immer diese nichtleer ist. Für jedes $i \in I$ setze

$$M_{\mathcal{R}}(U_i(K)) = \mathcal{R}(U_i(K))f_{1,i} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}(U_i(K))f_{n,i} \tag{25}$$

Die τ_{ij} können auch als Elemente von $\mathrm{GL}_n(\mathcal{R}(U_i(K) \cap U_i(K)))$ angesehen werden, die immer noch die Relation (24) erfüllen, und da $(U_i(K))_{i\in I}$ eine offene Abdeckung von $X(K)$ für die feine Topologie ist, erlauben es die τ_{ij} die in (25) definierten Teile zusammenzukleben. Dies definiert $M_{\mathcal{R}}$.
Damit haben wir ebenfalls für alle offenen Teilmengen U von X eine Abbildung $M(U) \longrightarrow M_{\mathcal{R}}(U(K))$ definiert, das heisst jeder Schnitt von M kann als Schnitt von $M_{\mathcal{R}}$ gesehen werden. Wie wir das bereits für rationale Funktionen, das heisst

Schnitte von $\mathcal{O}_X$ bemerkt haben, gilt das im Allgemeinen nicht umgekehrt.
Es ist klar, dass die Zuordnung $M \longmapsto M_{\mathcal{R}}$ funktoriell ist, und dass natürliche Isomorphismen $(M \oplus M')_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \oplus M'_{\mathcal{R}}$ sowie $(M \otimes_{\mathcal{O}_X} M')_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} M'_{\mathcal{R}}$ existieren. Insbesondere hat man $(\mathcal{O}_X)_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$.

Bemerkung 4.6. Auf dem topologischen Raum $X(K)$ kann auch die Garbe $C^0_K(-)$ der stetigen Funktionen betrachtet werden, die jeder offenen Teilmenge U von $X(K)$ die Algebra $C^0_K(U)$ der stetigen Funktionen $U \longrightarrow K$ zuordnet. Man kann sich dazu folgende Frage stellen: Schreibe $\overline{X} := \operatorname{spec} C^0_K(X)$. Dann gibt es eine natürliche, stetige Abbildung $X(K) \longrightarrow \overline{X}(K)$ definiert durch

$$x \longmapsto \{f \in C^0_K(X) \mid f(x) = 0\}$$

Da $X(K)$ separiert ist, ist diese Abbildung injektiv, und falls $X(K)$ kompakt ist, ist sie sogar ein Homeomorphismus. Was jedoch passiert wenn $X(K)$ nicht kompakt ist?

1.3. Analytische Struktur. Im Fall wo X eine glatte Varietät über K, und K entweder $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$ oder eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ ist[2], kann auf $X(K)$ eine reichhaltigere Struktur definiert werden, nämlich die Garbe der analytischen Funktionen. Dies soll im Folgenden erläutert werden.
Legen wir also einen der oben genannten Körper K, eine glatte Varietät X über K und einen Punkt $x \in X(K)$ fest. Als *lokale Parameter von X in x* bezeichnen wir Repräsentanten in $\mathcal{O}_x$ einer K–Basis von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Sind $T_1, \dots, T_n$ solche, so kann man diese auch als K–wertige Funktionen die in einer Umgebung von $x \in X(K)$ definiert sind ansehen.

Definition 4.7. Eine Funktion $f : X(K) \longrightarrow K$ heisst *analytisch in x* wenn lokale Parameter $T_1, \dots, T_n$ von X in x, eine Potenzreihe $\varphi \in K[[z_1, \dots, z_n]]$ und eine Umgebung U von x in $X(K)$ in der feinen Topologie existiert, so dass für alle $y \in U$ die Reihe $\varphi(T_1(y), \dots, T_n(y))$ absolut gegen $f(y)$ konvergiert.
Ist U irgend eine offene Teilmenge von $X(K)$ in der feinen Topologie, so heisst eine Funktion $f : U \longrightarrow K$ *analytisch auf U* wenn f in jedem Punkt von U analytisch ist. Ich schreibe $\mathcal{A}(U)$ für die K–Algebra der analytischen Funktionen auf U. Die Zuordnung $U \longmapsto \mathcal{A}(U)$ definiert eine Garbe auf $X(K)$, die *Garbe der analytischen Funktionen.*

Prüfen wir nach, dass der Begriff der Analytizität nicht von den speziellen lokalen Parametern abhängt, und dass lokalrationale Funktionen analytisch sind. Dazu sei $x \in X(K)$ ein K–rationaler Punkt von X und $T_1, \dots, T_n$ lokale Parameter in x. Man hat eine kanonische Einbettung des lokalen Rings $\mathcal{O}_x$ in seine Vervollständigung

$$\mathcal{O}_x \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_x} := \lim_{n \in \mathbb{N}} \left(\vartheta_n : \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{n-1}\right)$$

und die Wahl der lokalen Parameter $T_1, \dots, T_n$ kommt der Wahl eines Isomorphismus $\widehat{\mathcal{O}_x} \cong K[[z_1, \dots, z_n]]$ gleich. Man hat also eine Einbettung

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{O}_x &\longrightarrow K[[z_1, \dots, z_n]] \\ T_i &\longmapsto z_i \end{aligned}$$

Unsere präzisere Forderung lautet: Ist $f : X(K) \longrightarrow K$ eine lokalrationale Funktion, die in einer feinen Umgebung von x gleich dem Quotienten P/Q ist, mit $P, Q \in \mathcal{O}_X$

[2]Was man wirklich braucht ist dass für den Körper K der Satz der impliziten Funktion gilt.

und $Q(x) \neq 0$, so konvergiert für alle y in einer feinen Umgebung von x die Reihe $\tau(P/Q)(T_1(y), \dots, T_n(y))$ gegen $f(y)$.
Um dies zu zeigen nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an,

$$X = \operatorname{spec}(K[t_1, \dots, t_N]/\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$$

sei affin, und $X(K) \subseteq \mathbb{A}^N_K$. Die Matrize

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq N}}$$

ist dann vom Rang $N - n$. In dem man die f_i's und die t_j's entsprechend anordnet kann man annehmen dass

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq N-n \\ 1 \leq j \leq N-n}} \neq 0 \tag{26}$$

Die Einschränkungen auf X der Koordinatenfunktionen $t_1, \dots, t_n$ bilden dann ein System lokaler Parameter von X in x. Betrachte die algebraische Menge die durch die Gleichungen

$$f_1 = f_2 = \dots = f_{N-n} = 0 \tag{27}$$

definiert ist, und schreibe X' für die Vereinigung aller irreduziblen Komponenten derselben, die x enthalten. Offensichtlich hat man $X \subseteq X'$. Tatsächlich gilt aber sogar Gleichheit, und zwar weil x ein nichtsingulärer Punkt von X', und der Tangentialraum von X in x n–dimensional ist. Deshalb (Shafarevich [**20**], chapter II theorem 6) ist X' irreduzibel, woraus die gewünschte Gleichheit folgt.
Zusammenfassend kann also $X(K)$ lokal durch $N - n$ Gleichungen der Form (27) definiert werden, die (26) erfüllen. Dies sind aber genau die Hypothesen des Satztes der impliziten Funktion (siehe [**4**] A.3.4 für den p–adischen Fall). Es existieren also Potenzreihen $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-n} \in K[[z_1, \dots, z_n]]$ die in einer Umgebung von $0 \in K^n$ absolut konvergieren und die die Relation

$$f_i(z_1, \dots, z_n, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-n}) = 0 \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq N-n \tag{28}$$

erfüllen. Ausserdem sind diese Potenzreihen eindeutig durch (28) bestimmt. Sei

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathcal{O}_x & \longrightarrow & K[[z_1, \dots, z_n]] \\ t_i & \longmapsto & z_i \end{array}$$

die durch die Wahl der lokalen Parameter $t_1, \dots t_n$ bestimmte Einbettung von $\mathcal{O}_x$ in $K[[z_1, \dots, z_n]]$. Formell gilt für alle $1 \leq i \leq N - n$

$$f_i(z_1, \dots, z_n, \iota(t_{n+1}), \dots, \iota(t_N)) = 0$$

woraus man aufgrund der Eindeutigkeit der φ_k's schliesst dass $\varphi_j = \iota(t_{n+j})$. Insbesondere konvergieren die Reihen $\iota(t_j)$ in einer Umgebung von x, womit wir insbesondere gezeigt haben, dass die $t_{n+1}, \dots, t_N$ als Funktionen auf $X(K)$ gesehen analytisch in x sind.
Wie gesagt schreibt sich die lokalrationale Funktion f in einer feinen Umgebung von x als Quotient P/Q, wobei man P und Q auch als Polynome in $K[t_1, \dots, t_N]$ sehen kann. Man hat dann

$$\iota(P/Q) = \frac{P(\iota(t_1), \dots, \iota(t_N))}{Q(\iota(t_1), \dots, \iota(t_N))}$$

Eine einfache Abschätzung zeigt, dass weil die Reihen $\iota(t_j)$ in einer Umgebung von x konvergieren auch die Reihe $\iota(P/Q)$ in einer Umgebung von x konvergiert. Damit ist gezeigt dass lokalrationale Funktionen analytisch sind.
Ein ähnliches Argument zeigt, dass der Begriff der Analytizität nicht von den speziellen lokalen Parametern abhängt: Die Determinante

$$\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial t_j}(y)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$$

verschwindet nämlich in einer feinen Umgebung von x nicht, was zeigt, dass die formalen Umkehrungen $\tau\circ\iota^{-1}(z_j)=\tau(t_j)$ in einer Umgebung von $0\in K^n$ konvergieren, und somit bewahrt der Automorphismus $\tau\circ\iota^{-1}$ die Eigenschaft der Konvergenz in einer Umgebung von 0.
Schreibe $x=(x_1,\ldots,x_N)\in X(K)\subseteq\mathbb{A}^N_K$. Der Satz der impliziten Funktion besagt auch, dass es Umgebungen C von $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{A}^n_K$ und U von x in $X(K)$ gibt, so dass die Abbildung $C\longrightarrow U$

$$(z_1,\ldots,z_n)\longmapsto(z_1,\ldots,z_n,\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1})$$

ein bianalytischer Homeomorphismus ist. Wir haben eben gezeigt, dass für eine glatte Varietät X über K der topologische Raum $X(K)$ in natürlicher Weise die Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit über K besitzt. Die Definition hierfür ist

Definition 4.8. Sei X ein separabler, parakompakter topologischer Raum, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Abdeckung von X und für alle $i\in I$ sei $\varphi:U_i\longrightarrow C_i$ ein Homeomorphismus von U_i auf eine offenen Teilmenge C_i von K^n. Man nennt $(X,(\varphi_i:U_i\longrightarrow C_i)_{i\in I})$ eine *analytische Mannigfaltigkeit der Dimension n über K* wenn alle Transitionsfunktionen

$$\tau_{ij}:C_i\cap C_j\xrightarrow{\ \varphi_i^{-1}\ }U_i\cap U_j\xrightarrow{\ \varphi_j\ }C_i\cap C_j$$

für $i,j\in I$ mit $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ analytisch sind.

Beispiel 4.9. Vergnügen wir uns mit dem Kreis $X(K)\subseteq\mathbb{A}^2_K$ mit $X=\operatorname{spec}A$ und

$$A=K[t_1,t_2]/\langle t_1^2+t_2^2-1\rangle$$

Betrachten wir den Punkt $x:=(0,1)\in X(K)\subseteq\mathbb{A}^2_K$, der dem K–Algebrahomomorphismus $\epsilon_x:f\longmapsto f(0,1)$ von A nach K entspricht, oder aber alternativ dem K–rationalen Punkt $\ker\varepsilon_x$ des Schemas X. Die Funktion t_1 ist ein lokaler Parameter im Punkt $x:=(0,1)$, weil nämlich $t_1\in\mathfrak{m}_x$ aber $t_1\notin\mathfrak{m}_x^2$.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_x &= \left\{\frac{f}{g}\;\middle|\; f,g\in A, g(0,1)\neq 0\right\}\\ \mathfrak{m}_x &= \{f\in\mathcal{O}_x\mid f(0,1)=0\}\\ \mathfrak{m}_x^2 &= \left\{f\in\mathcal{O}_x\;\middle|\; f(0,1)=0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial t_1}(0,1)=0\right\}\end{aligned}$$

Die Funktion t_2 kann dann lokal als Potenzreihe in t_1 ausgedrückt werden, das heisst, es existiert eine eindeutige Reihe $\varphi\in K[[z]]$ so dass für alle $y=(y_1,y_2)$ in einer Umgebung von x die Gleichheirt $t_2(y)=y_2=\varphi(t_1(y))=\varphi(y_1)$ gilt. Sei

$$\varphi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$$

diese Reihe. Wir wissen dass $a_0 = \varphi(0) = \varphi(t_1(x)) = t_2(x) = 0$. Diese Information und die formale Gleichheit $1 - z^2 = \varphi(z)^2$ erlauben es, die Koeffizienten $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ auszurechnen. Man hat:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & a_0^2 \\ 0 & = & 2a_0a_1 \\ -1 & = & 2a_0a_2 + a_1^2 \\ 0 & = & 2a_0a_3 + 2a_1a_2 \\ 0 & = & 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} \end{array}$$

woraus man $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{8}$ etc. berechnet, solange bis man die allgemeine Form

$$a_{2i} = \frac{(-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(i-1-\frac{1}{2})}{i!} \qquad \text{und} \qquad a_{2i+1} = 0$$

errät, die man natürlich ohne grossen Aufwand mittels vollständiger Induktion nachprüft. Die so erhaltene Reihe

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \, \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-i+1)}{i!} z^{2i} \tag{29}$$

konvergiert tatsächlich in einer Umgebung von $0 \in K$, welcher der zur Auswahl stehenden Körper K auch immer ist: Im Fall $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ liefert das Quotientenkriterium einen Konvergenzradius 1. Im p–adischen Fall muss gezeigt werden, dass für genügend kleine z der Term $v(a_{2i}z^{2i})$ für grosse i gegen ∞ strebt. Das folgt aus der einfachen Abschätzung

$$v(i!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{i}{p^k} \right\rfloor v(p) \leq i \sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} v(p) = i\,\frac{v(p)}{p-1}$$

weil dann

$$\begin{array}{rcl} v(a_{2i}z^{2i}) & = & v\left(\dfrac{(-1)(2-1)(4-1)\cdots(2(i-1)-1)}{2^i\; i!} z^{2i}\right) \\ & \geq & 2i\,v(z) - i\,v(2) - i\,\dfrac{v(p)}{p-1} \end{array}$$

und somit konvergiert (29) für $v(z) > \frac{1}{2}\big(v(2) + v(p)(p-1)^{-1}\big)$.

Bemerkung 4.10. Unser Begriff der Analytizität ist rein lokal: Eine Funktion $f : U \longrightarrow K$ ist analytisch auf U wenn sie es in jedem Punkt von U ist. In den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ haben analytische Funktionen bekannterweise interessante Starrheitseigenschaften, die globaler Natur sind: Ist etwa eine analytische Funktion identisch Null in der Umgebung eines Punktes x von U, so ist dieselbe identisch Null auf der gesamten zusammenhängenden Komponente von x. Diese Starrheitseigenschaft ist leider nur trivialerweise wahr im p–adischen Fall, weil da die zusammenhängende Komponente von x bloss $\{x\}$ ist. Das Problem mit unserer Definition ist, dass alle lokalkonstanten Funktionen analytisch sind, und von denen

gibt es im p–adischen Fall viel zu viele.
Wie dem auch sei, man kann dieses Problem umschiffen, in dem man in der Definition 4.7 nicht bloss Konvergenz von $\varphi(y)$ nach $f(y)$ in einer gewissen Umgebung von x, sondern in einer *maximalen offenen* Umgebung von x verlangt. Das heisst, man verlangt dass wann immer φ in einer Umgebung von y konvergiert die Gleichheit $\varphi(y) = f(y)$ gilt. Im reellen und komplexen Fall ist das automatisch so, im p–adischen Fall allerdings unterscheiden sich die beiden Definitionen.

2. p–adische Integration

In diesem Abschnitt sei p eine fest gewählte Primzahl, K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $R := \mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in K. Sei $\mathfrak{m} \subset R$ das maximale Ideal in R und $\mathbb{F}_q := R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper mit $q = p^e$ Elementen. Definiere für $z \in K$ den Absolutbetrag als $|z|_p = q^{-v(z)}$ falls $z \neq 0$ und $|0|_p = 0$, wobei $v : K^* \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{Z}$ die normalisierte Bewertung auf K ist.
Die additive Gruppe K^n ist lokalkompakt, hausdorffsch und natürlich kommutativ. Somit existiert ein bis auf einen Skalar eindeutiges translationsinvariantes Mass auf K^n, das Haar–Mass, das wir durch

$$\int_{R^n} 1 \; dz_1 dz_2 \dots dz_n = 1$$

eichen. Das macht deshalb Sinn, weil R^n eine kompakte, abgeschloffene[3] Teilgruppe von K^n ist.

2.1. Integration von n–Formen. Legen wir ein integrales, separiertes glattes Schema X endlichen Typs mit Dimension n über K fest, und schreiben $\Omega^n_{X/K}$ für die Garbe der n–Formen auf X. Man weiss dass $\Omega^n_{X/K}$ eine lokal freier $\mathcal{O}_X$–Modul von Rang 1 ist. Sind $T_1, \dots, T_n$ lokale Parameter von X in x so kann man jeden Schnitt ω von $(\Omega^n_{X/K})_{\mathcal{R}}$ in einer feinen Umgebung U von x als

$$\omega = f \cdot dT_1 \wedge \cdots \wedge dT_n$$

darstellen, wobei f eine lokalrationale Funktion auf U ist. Ist f anstatt lokalrational analytisch, so bezeichnet man ω als *analytische n–Form*, und ich schreibe $(\Omega^n_{X/K})_{\mathcal{A}}$ für die Garbe der analytischen n–Formen auf $X(K)$. Man kann das auch als

$$(\Omega^n_{X/K})_{\mathcal{A}} := (\Omega^n_{X/K})_{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{A}$$

sehen. Die lokalen Parameter $T_1, \dots, T_n$ induzieren einen bianalytischen Homeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow C$ von U auf eine offene Teilmenge C von K^n. Die *p–adische Integration von ω auf U* ist dann definiert als

$$\int_U |\omega|_p = \int_C |f \circ \varphi^{-1}(z)|_p dz_1 \cdots dz_n$$

A priori hängt dieser Wert von der Wahl der lokalen Parameter $T_1, \dots, T_n$ ab. Dass dem nicht so ist zeigt folgendes Argument: Seien $S_1, \dots, S_n$ andere lokale Parameter in x, die einen analytischen Homeomorphismus $\psi : U \longrightarrow D$ von U (man ersetze eventuell U durch eine kleinere Umgebung von x) auf eine offene Teilmenge D von

[3] abgeschlossene und offene; In einem sehr sehr guten Englisch–Deutsch Wörterbuch findet man diesen Ausdruck unter *clopen*.

K^n induzieren. Es muss dann gezeigt werden, dass für jede analytische Funktion $g = f \circ \varphi^{-1}$ auf C

$$\int_C |g(z)|_p \, dz_1 \cdots dz_n = \int_D |g \circ (\varphi \circ \psi^{-1})(z)|_p \, dz_1 \cdots dz_n$$

Die Funktion $\varphi \circ \psi^{-1} : D \longrightarrow C$ ist ein analytischer Homeomorphismus, und die Determinante

$$\det J(z) = \det \left(\frac{\partial_i(\varphi \circ \psi^{-1})}{\partial z_j}(z) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

folglich eine analytische Funktion ohne Nullstellen auf D. Man kann, in dem man eventuell S_1 durch λS_1 für ein geeignetes $\lambda \in K^*$ ersetzt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dass $J(1) = 1$, das heisst $|J(1)|_p = q^0 = 1$. Nun ist aber die Funktion $z \longmapsto |\det J(z)|_p$ stetig auf D für die diskrete Topologie auf $\mathbb{Q}$, woraus folgt, dass $|\det J(z)|_p = 1$ für alle z in einer Umgebung von $0 \in K^n$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, in dem wir eventuell U weiter verkleinern, können wir annehmen dass $|J(z)|_p = 1$ für alle $z \in D$. Damit wird die Rechnung

$$\begin{aligned} \int_C |f \circ \varphi^{-1}(z)|_p \, dz_1 \cdots dz_n &= \int_D |f \circ \psi^{-1}(z)|_p \cdot |\det J(z)|_p \, dz_1 \cdots dz_n \\ &= \int_D |f \circ \psi^{-1}(x)|_p \, dz_1 \cdots dz_n \end{aligned}$$

trivial.

Satz 4.11. *Seien X und Y integrale, separierte glatte Schemata endlichen Typs mit Dimension n über K, und sei $f : Y \longrightarrow X$ ein generisch endlicher, dominanter*[4] *Morphismus. Dann gilt für jede analytische n–Form ω auf $X(K)$*

$$\int_{X(K)} |\omega|_p = \frac{1}{\deg f} \int_{Y(K)} |f^*\omega|_p$$

Beweis. Es gibt eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ so dass $f : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ ein endlicher Morphismus ist (Hartshorne **[12]**, chapter II, ex 3.7). Das heisst, dass $V(K) := f^{-1}(U(K))$ eine durchschnittsfremde Vereinigung von $\deg f$ Kopien von $U(K)$ ist. Weil $X(K) \setminus U(K)$ eine endliche Vereinigung von Varietäten mit Dimension $< n$ und damit vom Mass 0 ist, gilt

$$\deg f \int_{X(K)} |\omega|_p = \deg f \int_{U(K)} |\omega|_p = \int_{V(K)} |f^*\omega|_p = \int_{Y(K)} |f^*\omega|_p$$

□

Korollar 4.12. *Seien X und Y integrale, separierte glatte Schemata endlichen Typs mit Dimension n über K, und sei $f : Y \longrightarrow X$ ein birationaler, eigentlicher Morphismus. Dann gilt für jede analytische n–Form ω auf $X(K)$*

$$\int_{X(K)} |\omega|_p = \int_{Y(K)} |f^*\omega|_p$$

[4] das heisst, dass $f^{-1}(x)$ endlich ist, wobei x der dichte Punkt von X ist, und dass das Bild von f dicht in X liegt. Insbesondere ist der Körper der rationalen Funktionen von Y eine endliche Erweiterung mit des Körpers der rationalen Funktionen von X. Der Grad dieser Erweiterung ist $\deg(f)$.

2.2. Integration von Gittern. Betrachten wir die spezielle Situation wo X über dem Ganzzahlring von K definiert ist. Es bezeichne also X ein integrales, separables, glattes Schema endlichen Typs über dem Ganzzahlring R von K, und ich schreibe X_K für $X \times_{\operatorname{spec} R} \operatorname{spec} K$.
Man kann die R–ganzen Punkte $X(R) := \operatorname{Hom}_{\operatorname{spec} R}(\operatorname{spec} R, X)$ mit K–rationalen Punkten von X (oder von X_K) identifizieren:

$$X(R) \subseteq X(K) = X_K(K)$$

und falls X eigentlich über R ist hat man dann sogar Gleichheit. Das sind direkte Konsequenzen der Bewertungskriterien für Separiertheit respektive Eigentlichkeit (Hartshorne [**12**], II, 4.3 und 4.7). Es ist leicht zu sehen dass unter dieser Identifikation $X(R)$ offen in $X(K)$ ist.
Sei $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Dann kann f auch als Funktion auf $U(K)$ gesehen werden, die auf R–ganzen Punkten Werte in R annimmt. Aus den so erhaltenen Funktionen kann man wie in 4.5 eine Garbe $\mathcal{R}^0$ auf $X(K)$ erzeugen.
Es ist klar dass $\mathcal{R}^0(U) \subseteq \mathcal{R}(U)$ für jede offene Teilmenge U von $X(K)$. Insbesondere ist $\mathcal{R}$ eine $\mathcal{R}^0$–Algebra, und so kann jeder $\mathcal{R}$–Modul auch als $\mathcal{R}^0$–Modul angesehen werden.

Definition 4.13. Sei $\mathcal{M}$ ein lokal freier $\mathcal{R}$–Modul vom Rang r. Ein *Gitter in* $\mathcal{M}$ ist ein lokal freier $\mathcal{R}^0$–Modul $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ vom Rang r.

Beispiel 4.14. Ist $\mathcal{L}$ irgend ein lokal freier, endlichrangiger $\mathcal{R}^0$–Modul auf $X(K)$, so ist $\mathcal{L}$ ein Gitter in $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{R}^0} \mathcal{R}$.

Beispiel 4.15. Sei L ein endlichrangiger, lokal freier $\mathcal{O}_X$–Modul auf X. Genau so wie man aus einem $\mathcal{O}_{X_K}$–Modul M auf X_K einen $\mathcal{R}$–Modul $M_{\mathcal{R}}$ fabriziert, kann aus L ein $\mathcal{R}^0$–Modul $L_{\mathcal{R}^0}$ auf $X(R) = X(K)$ gewonnen werden. Man kann L auch via den natürlichen Morphismus $X_K \longrightarrow X$ in einen $\mathcal{O}_{X_K}$–Modul L_K auf X_K ziehen. In dieser Situation gilt dann

$$L_{\mathcal{R}^0} \otimes_{\mathcal{R}^0} \mathcal{R} \cong (L_K)_{\mathcal{R}}$$

kanonisch und natürlich.

Sei $\mathcal{M}$ ein lokal freier $\mathcal{R}$–Modul vom Rang r, und sei $\mathcal{L}$ ein Gitter in $\mathcal{M}$. Weil die feine Topologie aus $X(K)$ einen total unzusammenhängenden topologischen Raum macht, können globale Schnitte $f_1, \dots, f_r$ von $\mathcal{L}$ gefunden werden, so dass $\mathcal{L} = \mathcal{R}^0 f_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}^0 f_r$ und $\mathcal{M} = \mathcal{R} f_1 \oplus, \dots, \mathcal{R} f_r$. Solch ein System globaler Schnitte heisst *Erzeugendensystem von* $\mathcal{L}$, und wir sagen dass die Schnitte $f_1, \dots, f_r$ das Gitter $\mathcal{L}$ erzeugen. Ist $f_1', \dots, f_r'$ ein anderes Erzeugendensystem von $\mathcal{L}$, so gibt es ein $g \in \mathrm{GL}_r(\mathcal{R}^0(X(K)))$ so dass $g f_i = f_i'$ für alle $1 \leq i \leq r$.
Sei nun $\mathcal{L}$ ein Gitter in $(\Omega^n_{X_K/K})_{\mathcal{R}}$, wobei $n := \dim_R X$ die relative Dimension von X über R ist, und sei $f \in \mathcal{L}(X(K))$ ein Schnitt der $\mathcal{L}$ erzeugt. Wir schreiben für eine offene Teilmenge $U \subseteq X(K)$

$$\int_U |\mathcal{L}| := \int_U |f|_p$$

Das macht Sinn, weil wenn f' ein anderer erzeugender Schnitt von $\mathcal{L}$ ist, so unterscheidet sich f von f' nur durch eine Einheit, die nichts am Integral ändert. Ein speziell interessantes Gitter in $(\Omega^n_{X_K/K})_{\mathcal{R}}$ ist natürlich $(\Omega^n_{X/R})_{\mathcal{R}^0}$, wie der nachfolgende Satz von Weil ([**27**], 2.2.5) und in seiner hier präsentierten, leicht allgemeineren Form von Ito ([**13**], 3.1) zeigt:

Satz 4.16 (Weil **[27]**, Ito **[13]**). *Sei X ein glattes, separables Schema über R mit relativer Dimension $\dim_R X = n$. Dann gilt*

$$\int_{X(R)} |(\Omega^n_{X/R})_{\mathcal{R}^0}| = \frac{\#X(\mathbb{F}_q)}{q^n}$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und $\rho : X(R) \twoheadrightarrow X(\mathbb{F}_q)$ die Reduktion modulo $\mathfrak{m}$ Abbildung. Das heisst, ist $x : \operatorname{spec} R \longrightarrow X$ ein R–rationaler Punkt in X, so ist $\rho(x)$ der Punkt $\operatorname{spec} \mathbb{F}_q \longrightarrow \operatorname{spec} R \longrightarrow X$. Für jedes $\overline{x} \in X(\mathbb{F}_q)$ ist $\rho^{-1}(\overline{x})$ eine offene Teilmenge von $X(R)$, und man hat

$$X(R) = \coprod_{\overline{x} \in X(\mathbb{F}_q)} \rho^{-1}(\overline{x})$$

Damit

$$\int_{X(R)} |(\Omega^n_{X/R})_{\mathcal{R}^0}| = \sum_{\overline{x} \in X(\mathbb{F}_q)} \int_{\rho^{-1}(\overline{x})} |(\Omega^n_{X/R})_{\mathcal{R}^0}|$$

Es genügt also zu zeigen dass für alle $\overline{x} \in X(\mathbb{F}_q)$

$$\int_{\rho^{-1}(\overline{x})} |(\Omega^n_{X/R})_{\mathcal{R}^0}| = \frac{1}{q^n}$$

Ein System regulärer Parameter $(T_1, \dots, T_n) \subset \mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ in $\overline{x}$, definiert einen analytischen Homeomorphismus

$$\varphi : \rho^{-1}(\overline{x}) \longrightarrow \mathfrak{m}^n \subseteq K^n$$

Ein erzeugender Schnitt ω von $(\Omega^n_{X/R})_{\mathcal{R}^0}$ kann auf $\rho^{-1}(\overline{x})$ als

$$\omega = f \cdot dT_1 \wedge dT_2 \wedge \cdots \wedge dT_n$$

geschrieben werden, wobei f eine analytische Funktion auf $\rho^{-1}(\overline{x})$ ist. Nun ist aber $f(x)$ eine Einheit für alle $x \in \rho^{-1}(\overline{x})$, und damit $|f(x)|_p = 1$ für alle $x \in \rho^{-1}(\overline{x})$. Deshalb gilt

$$\int_{\rho^{-1}(\overline{x})} |\omega|_p = \int_{\mathfrak{m}^n} |f \circ \varphi^{-1}|_p \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathfrak{m}^n} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{q^n}$$

wobei die letzte Gleichung daher kommt, dass der Index von $\mathfrak{m}^n$ in R^n gleich q^n ist. □

Satz 4.17. *Seien X und Y glatte, eigentliche Schemata über R. Gibt es ein glattes und eigentliches Schema Z über R, und eigentliche birationale Morphismen $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ so dass $f^*\Omega_{X/R} \cong g^*\Omega_{Y/R}$, dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*

$$\#X(\mathbb{F}_{q^m}) = \#Y(\mathbb{F}_{q^m})$$

Beweis. Das ist einfach: Sei $L|K$ eine Erweiterung mit Bewertungsring $S \subseteq L$, so dass $\mathbb{F}_{q^m}|\mathbb{F}_q$ die entsprechende Restklassenkörpererweiterung ist. Dann gilt

$$\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^m})}{q^{mn}} = \int_{X_S(S)} |(\Omega^n_{X_S/S})_{\mathcal{R}^0}| = \int_{Z_S(S)} |(f^*\Omega^n_{X_S/S})_{\mathcal{R}^0}|$$

$$= \int_{Z_S(S)} |(g^*\Omega^n_{Y_S/S})_{\mathcal{R}^0}| = \int_{Y_S(S)} |(\Omega^n_{Y_S/S})_{\mathcal{R}^0}| = \frac{\#Y(\mathbb{F}_{q^m})}{q^{mn}}$$

Die erste und die letzte der Gleichungen impliziert der Satz 4.16, die zweite und die zweitletzte folgen aus dem Korollar 4.12. Bemerke dass weil X, Y und Z eigentlich sind kein Unterschied zwischen S–ganzen und L–rationalen Punkten besteht. Die Gleichung in der Mitte folgt daraus, dass $f^*\Omega_{X_S/S}$ und $g^*\Omega_{Y_S/S}$ als $\mathcal{O}_{Z_S/S}$–Moduln isomorph sind. Erzeugende Schnitte von $(f^*\Omega_{X_S/S})_{\mathcal{R}^0}$ und $(g^*\Omega_{Y_S/S})_{\mathcal{R}^0}$ unterscheiden dich also bloss durch eine Einheit von S, die nichts am Integral ändert. □

Die Schlussfolgerung des Satzes 4.17 kann natürlich auch als *...dann X und Y die selbe Zetafunktion.* formuliert derden. Wenn wir anstelle von birationalen Morphismen generisch endliche und dominante Morphismen nehmen, so erhalten wir folgendes, allgemeineres Resultat

SATZ 4.18. *Seien X, Y und Z glatte, eigentliche Schemata über R, und seien $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ generisch endliche und dominante Morphismen so dass $f^*\Omega_{X/R} \cong g^*\Omega_{Y/R}$. Dann gilt*

$$\zeta_X(s)^{\deg(g)} = \zeta_Y(s)^{\deg(f)}$$

BEWEIS. So wie der Beweis von 4.17, ausser dass man anstatt 4.12 den Satz 4.11 benutzt. □

KAPITEL 5

K–Äquivalenz

1. K–Ordnung auf einer birationalen Klasse

Definition 5.1. Seien X und Y glatte eigentliche Varietäten über einem Körper k. Man sagt dass $X \leq_K Y$, wenn eine glatte eigentliche Varietät Z über k, und birationale eigentliche Morphismen $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ existieren, so dass $f^*K_X \leq g^*K_Y$. Die so auf einer birationalen Klasse definierte Ordnungsrelation heisst K–*Ordnung*, und man sagt X und Y seien K–*äquivalent* wenn $X =_K Y$.

Eine kleine Nachprüfung ist angebracht: Seien wie in der Definition X, Y und Z glatte eigentliche Varietäten über k und $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ birationale eigentliche Morphismen so dass $f^*K_X \leq g^*K_Y$. Sei Z' eine weitere glatte eigentliche Varietät über k, und seien $f' : Z' \longrightarrow X$ und $g' : Z' \longrightarrow Y$ weitere birationale eigentliche Morphismen. Dann hat man ebenfalls ${f'}^*K_X \leq {g'}^*K_Y$.
Insbesondere schliessen wir daraus, dass X und Y genau dann K–äquivalent wenn eine glatte eigentliche Varietät Z über k, und birationale eigentliche Morphismen $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ existieren, so dass $f^*K_X = g^*K_Y$.

Bemerkung 5.2. Die Definition 5.1 macht auch dann noch Sinn, wenn X und Y nicht glatt, sondern nur $\mathbb{Q}$–Gorenstein sind. In diesem Fall ist $f^*K_X \leq g^*K_Y$ ein Vergleich von $\mathbb{Q}$–Divisoren auf Z.

2. K–Äquivalente Varietäten haben dieselben Hodge–Zahlen

Ziel dieses Abschnitts ist es, seinen Titel zu beweisen. Das geschieht in zwei Schritten: Zuerst soll das Resultat für Varietäten über einem Zahlkörper bewiesen werden, und in einem zweiten Schritt soll dann der allgemeine Fall mittels Deformation auf den bekannten zurückgeführt werden.

2.1. Der Zahlkörperfall.

Theorem 5.3. *Seien X, Y und Z glatte, eigentliche Varietäten über einem Zahlkörper k, und seien $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ über k definierte birationale, eigentliche Morphismen so dass $f^*\Omega^{\dim X}_{X/k} = g^*\Omega^{\dim Y}_{Y/k}$. Dann haben X und Y die selben Hodge–Zahlen.*

Beweis. Sei S eine genügend grosse, endliche Menge von maximalen Idealen des Ganzzahlrings $\mathcal{O}_k$ von k, und seien X_U, Y_U und Z_U Schemata die eigenlich und glatt über $U := \operatorname{spec} \mathcal{O}_k \setminus S$ sind, so dass $X = X_U \times_U \operatorname{spec} k$, $Y = Y_U \times_U \operatorname{spec} k$ und $Z = Z_U \times_U \operatorname{spec} k$, und so dass f und g in eigentliche, birationale Morphismen

$$\begin{tikzcd} & X_U \\ Z_U \arrow[ur, "f_U"] \arrow[dr, "g_U"'] & \\ & Y_U \end{tikzcd}$$

ausgedehnt werden können, die die Relation

$$f_U^*\Omega^n_{X_U/U} = g_U^*\Omega^n_{Y_U/U}$$

erfüllen. Sei $\mathfrak{p} \notin S$ ein maximales Ideal von $\mathcal{O}_k$ und sei R die Vervollständigung von $\mathcal{O}_k$ in $\mathfrak{p}$. Definiere $X_R := X_U \times_U \operatorname{spec} R$, und in gleicher Weise Y_R und Z_R, und schreibe $f_R : Z_R \longrightarrow X_R$ und $g_R : Z_R \longrightarrow Y_R$ für die von f_U und g_U induzierten Morphismen. Es gilt dann

$$f_R^*\Omega^n_{X_R/R} = g_R^*\Omega^n_{Y_R/R}$$

Dem Satz 4.17 zufolge hat man damit $Y_U(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = X_U(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$. Weil das für alle maximalen Ideale von $\mathcal{O}_k$ ausser diejenigen in S gilt, erlaubt es der Korollar 3.12 daraus zu schliessen dass X und Y die selben Hodge–Zahlen haben. □

2.2. Das Deformationsargument.

THEOREM 5.4. *Sind X und Y glatte, eigentliche K–äquivalente Varietäten über $\mathbb{C}$, so haben X und Y die selben Hodge–Zahlen.*

BEWEIS. Schreibe $n := \dim X = \dim Y$. Da X und Y K–äquivalent sind, existiert eine glatte, projektive Varietät Z über $\mathbb{C}$, und birationale Morphismen $f : Z \longrightarrow X$ und $g : Z \longrightarrow Y$ so dass $f^*\Omega^n_X = g^*\Omega^n_Y$. Wir können einen über $\mathbb{Q}$ endlich erzeugten Körper D, glatte, eigentliche Schemata X_D, Y_D und Z_D über D und Morphismen $f_D : Z_D \longrightarrow X_D$ und $g_D : Z_D \longrightarrow X_D$ wählen, so dass $f^*\Omega^n_{X_D/D} = g^*\Omega^n_{Y_D/D}$ gilt, und so dass

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr] \arrow[dddl] & & X_D \arrow[dddl] \\
Z \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] \arrow[dr, "g"'] \arrow[dd] & & Z_D \arrow[ur, "f_D"] \arrow[dr, "g_D"'] \arrow[dd] & \\
 & Y \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y_D \arrow[dl] \\
\operatorname{spec}\mathbb{C} \arrow[rr] & & \operatorname{spec} D &
\end{tikzcd}$$

$$X = X_D \times_{\operatorname{spec} D} \operatorname{spec}\mathbb{C}$$
$$Y = Y_D \times_{\operatorname{spec} D} \operatorname{spec}\mathbb{C}$$
$$Z = Z_D \times_{\operatorname{spec} D} \operatorname{spec}\mathbb{C}$$

kommutiert[1]. Sei T ein integrales, separiertes Schema endlichen Typs über $\mathbb{Q}$, dessen Körper der rationalen Funktionen isomorph zu D ist. Wir können X_D, Y_D, Z_D, f_D und g_D in Schemata X_T, Y_T und Z_T über T und Morphismen $f_T : Z_T \longrightarrow X_T$ und $g : Z_T \longrightarrow Y_T$ über T ausdehnen, und in dem wir eventuell T durch eine offene Teilmenge von T ersetzen, können wir annehmen dass diese Ausdehnungen eigentlich und glatt über T sind, dass f_T und g_T eigentliche, birationale Morphismen sind, so dass

$$f_T^*\Omega^n_{X_T/T} = f_T^*\Omega^n_{Y_T/T}$$

Sei $s \in T$ ein abgeschlossener Punkt. Die Fasern X_s Y_s und Z_s von X_T und Y_T und Z_T über s sind eigentlich und glatt über dem Restklassenkörper k in s, und es gilt

$$f_s^*\Omega^n_{X_s/k} = g_s^*\Omega^n_{Y_s/k}$$

[1]Wir wählen ein *Modell* über D

Da k ein Zahlkörper ist, haben nach 5.3 die Fasern X_s und Y_s die selben Hodge–Zahlen. Einem Resultat von Deligne zufolge ([**6**], 5.5) haben in einer glatten, eigentlichen Familie von Varietäten in Charakteristik 0 alle Fasern die selben Hodge–Zahlen. Der Satz 5.4 ist also eine Konsequenz von 5.3. □

3. Minimale Modelle und K–Äquivalenz

Im Folgenden seien alle Varietäten Varietäten über einem festgelegten, algebraisch abgeschlossenen Körper k. Falls nicht ausdrücklich das Gegenteil behauptet wird sind Punkte stets abgeschlossene Punkte.

3.1. Minimale Modelle: Motivation. Sei X eine glatte, projektive Fläche, und $P \in X$ ein Punkt von X. Sei $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ die Aufblasung von X in P und sei $E := \pi^{-1}(P) \subseteq \widetilde{X}$ die Ausnahmskurve. Man weiss ([**12**], V, 3.1) dass $\widetilde{X}$ eine glatte und projektive Fläche ist, dass $E \cong \mathbb{P}^1_k$, und dass die Einschränkung von π auf $\widetilde{X} \setminus E$ ein Isomorphismus auf $X \setminus P$ ist. Ausserdem ist (loc. cit.) die Selbstschnittzahl $E^2 = E.E = -1$.
Ein Satz von Castelnuovo (loc. cit. V, 5.7) zeigt, dass das auch umgekehrt funktioniert:

Theorem 5.5 (Castelnuovo). *Sei $\widetilde{X}$ eine projektive glatte Fläche, und sei E eine Kurve in X so dass $E \cong \mathbb{P}^1_k$ und $E.E = -1$. Dann existiert eine projektive glatte Fläche X, ein Morphismus $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ und ein Punkt P in X so dass $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ eine Aufblasung mit Zentrum $P = \pi(E)$ ist.*

Die Moral von der Geschichte ist also dass eine Fläche genau dann die Aufblasung einer anderen Fläche in einem Punkt ist, wenn auf der ersteren eine zu $\mathbb{P}^1_k$ isomorphe Kurve mit Selbstschnittzahl -1 existiert. Von speziellem Interesse sind natürlich diejenigen Flächen die nicht die Aufblasung einer anderen sind.

Definition 5.6. Eine glatte, projektive Fläche X heisst *relatives minimales Modell* wenn auf X keine Kurve $E \cong \mathbb{P}^1_k$ mit $E.E = -1$ existiert. Ist X das einzige relative minimale Modell in seiner birationalen Klasse, so nennen wir X kurzerhand *minimales Modell.*

Der folgende Satz von Zariski ist ein zentrales Resultat für die Klassifikation der glatten projektiven Flächen (siehe Kollár, [**14**], Kapitel III.2)

Theorem 5.7 (Zariski). *Sei Y eine glatte, projektive Fläche. Dann gibt es einen birationalen Morphismus $f : Y \longrightarrow X$ von Y auf ein relatives, minimales Modell X.*
Wenn Y nicht rational, und auch keine Regelfläche ist, dann ist X eindeutig, also ein minimales Modell.

Definition 5.8. Sei X eine glatte, projektive Varietät. Ein Divisor D auf X heisst *nef* (*n*umerisch *ef*fektiv), wenn für jede Kurve C auf X die Schnittzahl $C.D$ grösser oder gleich Null ist.

Bemerkung 5.9. Da die Schnittzahl $C.D$ nur von der Divisorenklasse von D abhängt, macht es Sinn eine Divisorenklasse nef zu nennen wenn einer, und damit alle ihre Repräsentanten nef sind. Ich rufe in Erinnerung, dass für eine glatte[2]

[2]allgemeiner für eine lokal faktorielle

Varietät die Guppe $\mathrm{Pic}(X)$ der Isomorphismenklassen von Geradenbündeln unter der Operation $\otimes$ kanonisch isomorph zur Divisorenklassengruppe von X, das sind Divisoren modulo Hauptdivisoren, ist. Beide dieser Gruppen können auch mit $H^1(X, \mathbb{G}_m)$ identifiziert werden. Speziell interessant ist das Bündel $\Omega_X^{\dim X}$ auf X, und dessen zugehörige Divisorenklasse K_X, genannt *kanonische Klasse* oder *kanonischer Divisor*.

Es ist einfach zu zeigen dass eine Fläche X ein relatives minimales Modell ist wenn der kanonische Divisor von X nef ist: Nehmen wir nämlich umgekehrt an X sei kein relatives minimales Modell, dann existiert also eine Kurve $E \cong \mathbb{P}_k^1$ auf K mit $E.E = -1$. Man weiss ([**12**], V, 1.5), dass für eine glatte Kurve C in X vom Geschlecht g die Beziehung

$$2g - 2 = C.(C + K_X)$$

gilt. Für die Kurve E die vom Geschlecht 0 ist erhält man $-2 = E.E + E.K_X$. Daraus folgt $E.K_X = -1$, und deshalb ist K_X nicht nef.
Umgekehrt stimmt das nicht: Es gibt relative minimale Modelle deren kanonischer Divisor nicht nef ist. Zum Beispiel $X = \mathbb{P}_k^2$. Das folgende Resultat (siehe Kollár [**14**], Beweis des Theorems III.2.1) zeigt, dass rationale Flächen und Regelflächen die einzigen Ausnahmen sind:

Theorem 5.10. *Eine glatte, projektive Fläche X ist genau dann ein minimales Modell wenn die kanonische Klasse K_X von X nef ist.*

Fortschritt ist in der Mathematik bekanntlich dadurch ausgezeichnet, dass Sätze zu Definitionen werden. Hoffnungsvoll nennen wir also *glattes minimales Modell* eine jede glatte projektive Varietät X, deren kanonische Divisorenklasse nef ist.
Es ist allerdings falsch – soviel zu unseren blauäugigen Hoffnungen – dass in Dimensionen ≥ 3 in einer birationalen Klasse jeweils, wenn überhaupt eines, dann nur ein einziges minimales glattes Modell existiert. Die Klassifikation der minimalen glatten Modelle in einer gegebenen birationalen Klasse (man schliesst dabei die rationale Klasse, Klassen von Faserungen und noch ein paar andere, von denen man weiss dass sie keine minimalen Modelle enthalten aus) ist eine prestigeträchtige Angelegenheit, und somit gegenwärtig ein aktives Forschungsfeld.
Zum Schuss sei noch angemerkt dass in Dimension 3 solch eine Klassifikation bekannt ist: Birationale glatte minimale Modelle der Dimension 3 sind durch eine Kette sogenannter *Flops* verbunden (J. Kollár, *Flops*, Nagoya Math. J. **113** (1989) 15-36). Ein Flop ist eine spezielle Folge von birationalen Transformationen, wo man zwischenzeitlich auch mit Singularitäten arbeiten muss. Dies legt nahe, dass man auch minimale Modelle mit gewissen Singularitäten studieren sollte.

3.2. Birationale glatte minimale Modelle sind K–äquivalent. Es soll gezeigt werden, dass birationale glatte minimale Modelle über einem festgelegten, algebraisch abgeschlossenen Körper k von Charakteristik 0 K–äquivalent sind. Im Beweis können wir nicht auf Hironakas Satz von Existenz einer Auflösung der Singularitäten verzichten, deshalb die zusätzliche Hypothese $\mathrm{char}\, k = 0$.

Satz 5.11. *Birationale glatte minimale Modelle über einem algebraisch abgeschlossenen Körper von Charakteristik 0 sind K–äquivalent.*

Beweis. Seien X und Y glatte, birationale minimale Modelle über einem algebraisch abgeschlossenen Körper von Charakteristik 0, und sei $n := \dim X = \dim Y$.

Sei $\Gamma \subseteq X \times Y$ der Graph einer birationalen Transformation $X \dashrightarrow Y$, und sei $\rho : Z \longrightarrow \Gamma$ eine Auflösung der Singularitäten von Γ. Somit ist Z eine glatte, eigentliche Varietät, und man hat birationale, eigentliche Morphismen

$$f : Z \xrightarrow{\rho} \Gamma \xrightarrow{\pi_X} X$$
$$g : Z \xrightarrow{\rho} \Gamma \xrightarrow{\pi_Y} Y$$

Es bleibt zu zeigen dass $f^*K_X = g^*K_Y$ für diese Wahl von Z, f und g gilt. Dabei genügt es zu zeigen dass $f^*K_X \geq g^*K_Y$, die entgegengesetzte Ungleichung ergibt sich aus der Symmetrie. Schreibe

$$\begin{aligned} K_Z &= f^*K_X + E \\ K_Z &= g^*K_Y + E' \end{aligned}$$

wobei E, E' effektive Divisoren sind; E ist ein Ausnahmsdivisor für f, und E' ein Ausnahmsdivisor für g. Schreibe $F := E' - E$, so dass also

$$f^*K_X = g^*K_Y + F$$

Es muss gezeigt werden, dass $F \geq 0$. Schreibe F als Summe

$$F = \sum_{j=0}^{n-1} F_j$$

so dass $\dim(\operatorname{supp} f(F_j)) = j$ für alle $0 \leq j \leq n-1$. Weil E ein Ausnahmsdivisor für f ist gilt $F_{n-1} \geq 0$. Wir zeigen rekursiv dass $F_j \geq 0$ für $j = n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$. Nehmen wir also an, dass $F_j \geq 0$ für $j = n-1, \ldots, k+1$, und zeigen dass $F_k \geq 0$. Sei L ein sehr ampler Divisor auf X, und H ein sehr ampler Divisor auf Z, und schreibe S für die Fläche

$$S := H^{n-2-k}.f^*L^k$$

Man hat

$$f^*K_X|_S = g^*K_Y|_S + A - B \tag{30}$$

für effektive Divisoren A und B von S, ohne gemeinsame Komponenten. Es gilt $S.F = A - B$. Die Komponenten von B können nur von F_k stammen, weil einerseits $F_j \geq 0$ falls $j > k$, und falls $j < k$ ist, kann man annehmen dass $f(F_j) \cap L^k = \varnothing$. Wer (30) mit B schneidet findet

$$B.f^*K_X = B.g^*K_Y + B.A - B.B \tag{31}$$

Weil K_Y nef ist, ist $B.g^*K_Y = g(B).K_Y$ positiv oder null, und es gilt ebenfalls $A.B \geq 0$. Weiter ist $B.f^*K_X = f(B).K_X = 0$, weil $f(B) \subseteq L^k \cap f(F_k)$ nulldimensional ist. Aus (31) folgert man also dass $B.B \geq 0$. Nach dem Hodge'schen Indexsatz ist das aber nur dann möglich wenn $B = 0$. Somit ist $F_k \geq 0$, was zu zeigen war. □

Korollar 5.12. *Birationale glatte minimale Modelle über $\mathbb{C}$ haben dieselben Hodge–Zahlen*

Beweis. Das folgt direkt aus 5.11 und 5.3. □

Das Resultat 5.12 ist in Dimension 2 klar, aufgrund der Eindeutigkeit der glatten minimalen Modelle für Flächen, und wenn man weiss dass ein Flop die Hodge–Zahlen unverändert lässt kann man 5.12 für dreidimensionale Varietäten aus Kollár's Klassifikation der glatten minimalen Modelle in Dimension 3 schliessen.

Literaturverzeichnis

[1] Ax, J. *Zeros of polynomials over local fields - The Galois action* Journal of Algebra **15** (1970), 417-428

[2] Batyrev, V. *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities* Integrable systems and algebraic geometry (Kobe, Kyoto 1997), 1-32, World Sci. pub., River Edge, NJ, 1998

[3] Bott, R. and Tu, L.W. *Differential forms in algebraic topology* Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer Verlag, New York, Berlin, 1982

[4] Colmez, P. *Intégration sur les variétés p–adiques* Asterisque **248** Soc. Math. de France, 1998

[5] Deligne, P. *La conjecture de Weil I* Publications mathématiques de l'IHES **43** (1974), 273-307

[6] Deligne, P. *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales* Publications mathématiques de l'IHES **35** (1968), 259-278

[7] Deligne, P. *Théorie de Hodge II* Publications mathématiques de l'IHES **40** (1971), 5-57

[8] Dwork, B. *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety* Amer. J.Math. **82** (1960), 631-648

[9] Faltings, G. *p–adic Hodge theory* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988) no.1, 255-299

[10] Fulton, W. *Introduction to Toric varieties* Annals of mathematics studies **131** The William H. Roever Lectures in Geometry, Princeton univ. press 1993

[11] Grothendieck, A. *SGA5, cohomologie ℓ–adique et fonctione L* Lecture notes **589** (1977), Springer Verlag

[12] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry* Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer New York, Berlin 1977

[13] Ito, T. *Birational smooth minimal models have equal Hodge numbers in all dimensions* Calabi-Yau varieties and mirror symmetry (Toronto, ON, 2001), 183-194. Fields Inst. Commun. **38** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003

[14] Kollár, J. *Rational Curves on Algebraic Varieties* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge Band **32** Springer Verlag, New York, Berlin 1996

[15] Lang, S. *Algebraic number theory* Graduate Texts in Mathematics **110**, Springer New York, Berlin 1994

[16] Milne, J.S. *Lectures on étale cohomology* www.math.lsa.umich.edu/∼jmilne/

[17] Milne, J.S. *Etale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, NJ, 1980

[18] Serre, J.P. *Corps locaux* Actualités scientifiques et industrielles **1296**, Hermann, Paris, 1962

[19] Serre, J.P. *Rationalité des fonctions ζ des variétés algébriques* Seminaire Bourbaki **198** (1960)

[20] Shafarevich, I.R. *Basic algebraic geometry 1 & 2, 2nd ed.* Springer Verlag, Berlin 1994

[21] Silverman, J.H. *The arithmetic of elliptic curves* Springer Graduate Texts in Mathematics **106**, Springer Verlag New York, Berlin, 1986

[22] Tamme, G. *Introduction to étale cohomology* Universitext, Springer Verlag, Berlin 1994

[23] Tate, J.T. *p–divisible groups* in *Proceedings on a conference on local fields, Driebergen 1966*, 158-183, Springer Verlag, Berlin, 1967

[24] Tsuji, T. *p–adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi–stable reduction case*, Invent. Math **137** (1999), 233-411

[25] Voisin, C. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe* Cours spécialisés **10**, Soc. Math. de France, Paris, 2002

[26] Wang, C. *Cohomology theory in birational geometry* Journal of Differential Geometry **60** (2002), 345-354

[27] Weil, A. *Adeles and algebraic groups* Progress in Mathematics **23**, Birkhäuser Verlag, Boston, Mass, 1982

[28] Weil, A. *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* Actualités scientifiques et industrielles **1041**, Hermann, Paris, 1948